Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 12
12. Juli 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 22. Juli 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Der Wetterfrosch Aminata sitzt auf einer Leiter mit drei Sprossen. Jeden Tag springt Aminata mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Sprosse abwärts oder aufwärts. Sollte sie die unterste bzw. oberste Sprosse erreicht haben und trotzdem weiter abwärts bzw. aufwärts springen, so fällt sie von der Leiter und beendet ihre Karriere als Wetterfrosch.

(a) Modellieren Sie Aminatas Sprünge durch eine Markov-Kette.

(b) Angenommen, Aminata befindet sich auf der mittleren Sprosse. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kehrt Aminata zu dieser Sprosse zurück?

(c) Bestimmen Sie die erwartete Dauer von Aminatas Karriere, falls sie sich momentan auf der mittleren Sprosse befindet.

Tutoraufgabe 2

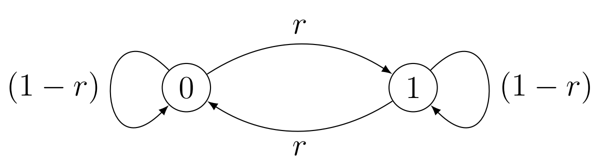
Die Honigbiene Armin hat auch im Sommer viel Arbeit. Auf einer Wiese mit einer gelben, einer blauen und zwei roten Blumen fliegt Armin von Blüte zu Blüte, wobei er darauf achtet, nicht zweimal hintereinander die gleiche Farbe anzusteuern. Kurz bevor er zur nächsten Blume aufbricht, wählt Armin aus allen Blumen mit geeigneter Farbe gleich wahrscheinlich sein nächstes Ziel.

(a) Sei X_t die Farbe der t-ten Blume, die Armin besucht. Bestimmen Sie das Übergangsdiagramm und die Startverteilung der Markov-Kette $(X_t)_{t\geq 0}$ unter der Annahme, dass die Tour mit der gleichen Wahrscheinlichkeit bei jeder der vier Blumen beginnt.

(b) Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung und prüfen Sie, ob diese eindeutig ist.

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten die unten angegebene Markov-Kette, wobei $0 \leq r \leq 1$.



(a) Wie muss r gewählt werden, damit es sich um eine aperiodische, irreduzible oder ergodische Markov-Kette handelt?

(b) Für welche Werte von r existiert ein Vektor π, sodass $\lim_{t\to\infty} p_{i,j}^{(t)} = \pi_j$ für alle Zustände $i, j \in \{0, 1\}$ gilt?

Hausaufgabe 1 (6 Punkte)

Für ihr jüngstes Forschungsprojekt ist Biologin Alison nach Südafrika gereist, um jede der n heimischen Zwergantilopen zu fotografieren. Angenommen, jedes Tier erscheint mit gleicher Wahrscheinlichkeit einzeln vor der Kamera. Alison macht bei jeder Sichtung ein Foto und gibt nicht auf, bevor sie alle n Tiere mindestens einmal fotografiert hat. Sei X_t die Anzahl unterschiedlicher Zwergantilopen nach $t \geq 0$ Fotos.

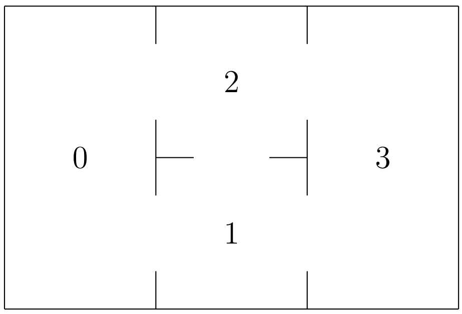
(a) Modellieren Sie die Markov-Kette $(X_t)_{t \geq 0}$.

(b) Ist die Markov-Kette aperiodisch, irreduzibel oder ergodisch?

(c) Angenommen, es gibt $n = 3$ Zwergantilopen. Wie viele Fotos benötigt Alison im Erwartungswert, bis sie alle drei Tiere mindestens einmal aufgenommen hat?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Der Museumswärter Agimar patrouilliert durch die vier Räume 0, 1, 2 und 3 der Ausstellung „Wunder der Wahrscheinlichkeitstheorie". Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ geht Agimar von seinem momentanen Raum in einen zufälligen Nachbarraum, wobei alle Nachbarräume gleich wahrscheinlich sind. Agimars Wachgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ in Raum 0. Die folgende Skizze zeigt den Grundriss der Ausstellung.



(a) Modellieren Sie Agimars Wachgang durch eine Markov-Kette $\{X_t\}_{t \geq 0}$, wobei X_t den Raum angibt, indem sich Agimar zum Zeitpunkt t befindet.

(b) Kurz gegen Ende von Agimars Schicht, zum Zeitpunkt $t \to \infty$, möchte die Meisterdiebin Bianka Exponate aus einem der vier Räume der Ausstellung stehlen. Damit sie nicht erwischt wird, sollte sie allerdings einen Raum wählen, in dem sich Agimar mit niedriger Wahrscheinlichkeit aufhält. Bestimmen Sie $\lim_{t \to \infty} q_t$ und geben Sie an, in welchen Räumen Bianka mit der geringsten Wahrscheinlichkeit erwischt wird.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Anna und Bodo haben sich folgendes Spiel mit einem fairen Würfel ausgedacht: Anna beginnt und würfelt so lange, bis sie entweder eine ungerade Zahl würfelt (dann ist Bodo an der Reihe), oder drei Mal hintereinander eine gerade Zahl geworfen hat (dann ist das Spiel zu Ende und Anna hat gewonnen). Ist Bodo an der Reihe, so würfelt er ein einziges Mal. Zeigt der Würfel eine Sechs, so ist das Spiel zu Ende und Bodo hat gewonnen. Andernfalls ist wieder Anna an der Reihe.

(a) Modellieren Sie das Spiel als Markov-Kette.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Anna gewinnt.

(c) Wie oft wird der Würfel insgesamt erwartungsgemäß geworfen, ehe das Spiel beendet ist?

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(Y_i)_{i\geq 0}$ eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen, die jeweils die Werte 1 und -1 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen. Des Weiteren sei $X_t = (\sum_{i=0}^{t} Y_i) \bmod 4$. Wir betrachten die Markov-Kette $(X_t)_{t\geq 0}$.

(a) Geben Sie das zugehörige Übergangsdiagramm an.

(b) Ist die Markov-Kette irreduzibel bzw. aperiodisch?

(c) Bestimmen Sie die Menge aller stationären Verteilungen.