Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 11
5. Juli 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 15. Juli 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Aus Wetteraufzeichnungen der letzten n Tage schätzt der Wetterfrosch Aminata die durchschnittliche Temperatur in Kinshasa auf $\overline{X}$ Grad. Hierbei geben die unabhängigen und mit unbekanntem Erwartungswert μ sowie Standardabweichung $\sigma = 2$ normalverteilten Zufallsvariablen X_i die Temperaturen der einzelnen Tage an.

(a) Finden Sie eine möglichst kleine untere Schranke für n, sodass $\overline{X}$ mit einem Konfidenzniveau von 0,9 höchstens 1 Grad von μ abweicht.

(b) Sei nun $n = 100$. Geben Sie ein möglichst kleines Konfidenzintervall $[\overline{X} - c, \overline{X} + c]$ an, auf das Aminata die durchschnittliche Temperatur μ mit einem Konfidenzniveau von 0,9 eingrenzen kann.

Tutoraufgabe 2

Die Zauberkünstlerin Aida besitzt einen magischen Zylinder, aus dem sie mit Wahrscheinlichkeit p weiße und ansonsten schwarze Kaninchen hervorzaubert. Der Ausgang des Zaubertricks ist hierbei unabhängig von vorherigen Versuchen. Leider ist Aida der exakte Wert von p unbekannt. Der Hersteller des Hutes versichert ihr jedoch, dass entweder $H_0 : p = 1/4$ oder $H_1 : p = 3/4$ gilt. Um die beiden Hypothesen zu testen, zaubert Aida n Kaninchen herbei und betrachtet die Zahl X der weißen Exemplare.

(a) Sei $K \subseteq \{0, \dots, n\}$ Aidas Ablehnungsbereich für H_0 bezüglich der Testgröße X. Wie muss Aida K in Abhängigkeit von n wählen, sodass die Summe des Fehlers erster und des Fehlers zweiter Art minimal ist?

(b) Angenommen, Aida lehnt H_0 ab, falls $X \geq n/2$. Finden Sie mit Hilfe der Chernoff-Schranken ein n sinnvoller Größenordnung, sodass der Fehler erster Art kleiner als 0,05 wird. Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass $(e/4)^8 < 0{,}05$.

Tutoraufgabe 3

Ein neues Medikament wird an $n = 100$ Personen erprobt. Es wird angenommen, dass dieses jede behandelte Person unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p heilt. Der Hersteller des Medikaments behauptet, dass $p \geq 0{,}9$ gilt. Führen Sie einen geeigneten Hypothesentest mit Signifikanzniveau 5 % durch, um den größtmöglichen Ablehnungsbereich für die Hypothese des Herstellers zu bestimmen.

Hausaufgabe 1 (6 Punkte)

Der Kekshändler Arsatius kauft Schokoladenkekse beim Produzenten seines Vertrauens. Dieser verspricht, dass mindestens jeder zweite seiner Kekse echte Schokolade enthält. Von einem konkurrierenden Produzenten hat Arsatius allerdings erfahren, dass dies höchstens auf jeden dritten Keks zutreffen soll. Um beide Hypothesen zu überprüfen, wählt Arsatius zufällig vier Kekse aus seiner letzten Lieferung aus und überprüft diese auf ihren Schokoladengehalt. Sollten weniger als zwei Kekse echte Schokolade enthalten, so lehnt Arsatius die Behauptung seines Produzenten ab und wechselt zur Konkurrenz.
Angenommen, jeder Keks der Stichprobe enthält unabhängig und mit identischer Wahrscheinlichkeit p echte Schokolade. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Arsatius fälschlicherweise zur Konkurrenz wechselt, bzw. fälschlicherweise bei seinem ursprünglichen Produzenten bleibt.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Amadeus testet ein neues Verfahren, um Mutationen in seiner Bakterienkolonie hervorzurufen. Dieses ist bei jedem Bakterium unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$ erfolgreich. Amadeus vermutet, dass $p \leq 2/100$ gilt und zählt zur Überprüfung, wie viele der insgesamt 10000 Bakterien mutiert sind. Zur Auswertung wendet er einen approximativen Binomialtest mit Ablehnungsbereich $K = \{208, \ldots, 10000\}$ an. Bestimmen Sie das Signifikanzniveau des Hypothesentests.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Da Aida unzufrieden mit ihrer kürzlich erworbenen Münze (vgl. HA1 auf Blatt 10) ist, tauscht sie diese auf dem Flohmarkt gegen einen gezinkten Würfel um. Diesmal versichert ihr der Verkäufer, dass der Würfel mit Wahrscheinlichkeit 1/3 auf die Sechs fällt, während alle anderen Augenzahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Um dies zu überprüfen, würfelt Aida hundert mal und beobachtet dabei folgende Häufigkeiten.

Zahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	13	10	12	17	13	35

Kann Aida auf Signifikanzniveau 0,01 dem Verkäufer ihren Glauben schenken? Führen Sie einen geeigneten Hypothesentest durch.

Hinweis: Sie dürfen $\chi^2_{k,\alpha}$ mit $k \cdot \left(1 - (2/(9k)) + z_\alpha \cdot \sqrt{2/(9k)}\right)^3$ approximieren, wobei z_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Alwins Schwester Bonnie, die ebenfalls in der Melonenzucht tätig ist, behauptet, dass ihre Melonen im Schnitt mindestens so gut schmecken wie Alwins Melonen. Um diese provokante Aussage zu widerlegen, testet Alwin jeweils 16 seiner eigenen Melonen und 16 von Bonnies Melonen auf ihren Geschmack. Der Geschmack von Alwins bzw. Bonnies Melonen sei durch die unabhängigen und mit unbekanntem Erwartungswert μ_X bzw. μ_Y normalverteilten Zufallsvariablen X_i bzw. Y_i gegeben. Die Standardabweichung σ ist Alwin unbekannt, aber für alle Melonen gleich. Überprüfen Sie mit einem geeigneten Hypothesentest, ob Bonnies Behauptung mit einem Signifikanzniveau von 0,01 abgelehnt werden kann, wenn Alwin die folgenden Geschmackswerte ermittelt hat:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X_i	-1	0	1	1	2	-1	4	3	-1	-2	1	4	2	-1	4	2
Y_i	-4	-3	-2	0	-2	-2	3	0	0	-3	-4	0	-1	-2	0	2

Hinweis: Sie dürfen $t_{k,\alpha}$ für $k \geq 30$ mit z_α approximieren.

Verteilungswerte der Standardnormalverteilung

Diese Tabelle der Standardnormalverteilung enthält die Werte von $\Phi(x)$ für $0 \leq x \leq 2{,}99$. Beispielsweise gilt $\Phi(1{,}55) \approx 0{,}939$.

$\Phi(x)$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999