Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 10
28. Juni 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 8. Juli 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Bemerkung: Wie in der Vorlesung erwähnt, gelten die Linearität des Erwartungswerts (Sätze 33 bzw. 50), sowie die Sätze 39, 41, 52 und 54 auch für kontinuierliche Zufallsvariablen. Diese Eigenschaften dürfen in Zukunft ohne Beweis verwendet werden.

Tutoraufgabe 1

Bei einem Wettbewerb im Bogenschießen schießt Arngard $n \in \mathbb{N}$ Pfeile auf eine Zielscheibe. Seien X_i unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Standardabweichung σ, die den Abstand des i-ten Pfeils zum Mittelpunkt der Zielscheibe angeben. Des Weiteren sei $Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X_i$ eine Konvexkombination der einzelnen X_i.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei Y um einen erwartungstreuen Schätzer für μ handelt.

(b) Beweisen Sie, dass $1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \geq 1/n^2$ gilt.

(c) Bestimmen Sie Koeffizienten λ_i, welche die Effizienz des Schätzers Y optimieren.

Tutoraufgabe 2

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Stichprobenvariablen einer mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilten Zufallsvariable X. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer Y für den Parameter λ.

Tutoraufgabe 3

Auf einer Bergwanderung begegnet Adelheid $n \in \mathbb{N}$ Wolpertingern, wobei die jeweiligen Größen der Tiere durch unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gegeben sind. Aus ihrem Bergsteigerhandbuch weiß Adelheid, dass jedes X_i auf dem Intervall $[0, m]$ gleichverteilt ist. Allerdings hat Adelheid den genauen Wert von m vergessen.

(a) Definieren Sie einen Koeffizienten c, sodass das gewichtete Stichprobenmittel $c \cdot (\sum_{i=1}^{n} X_i)/n$ ein erwartungstreuer Schätzer für m ist.

(b) Konstruieren Sie zum Vergleich einen Maximum-Likelihood-Schätzer für m. Ist der Schätzer erwartungstreu?

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Auf einem Flohmarkt hat Zauberkünstlerin Aida eine neue Münze für ihre Sammlung gezinkter Geldstücke gekauft. Leider konnte der Verkäufer Aida die Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$, mit der die Münze Kopf zeigt, nicht genau sagen. Um p abzuschätzen, wirft sie die Münze daher so lange, bis n-mal Kopf gefallen ist. Sei X_n die Anzahl der Zahlwürfe. Konstruieren Sie mit Hilfe von X_n einen erwartungstreuen Schätzer für $1/p$.

Hinweis: Die Verteilung von X_n wurde bereits in Tutoraufgabe 3 von Übungsblatt 4 betrachtet.

Hausaufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Stichprobenvariablen einer Zufallsvariable X. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für den jeweiligen Parameter der Verteilung unter der Annahme, dass

(a) X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$,

(b) X geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$

ist. Untersuchen Sie in beiden Fällen, ob der Schätzer erwartungstreu ist.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Wie in Tutoraufgabe 2 betrachten wir Maximum-Likelihood-Schätzer für die Exponentialverteilung. Seien hierzu wieder $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige exponentialverteilte Stichprobenvariablen mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Finden Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer Z für $1/\lambda$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass der Schätzer Y aus Tutoraufgabe 2 bzw. der Schätzer Z aus (a) erwartungstreu für beliebige n ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Existenz der jeweiligen Erwartungswerte.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Auf Geschäftsreise in einer fremden Stadt fährt Annemarie fünfmal Taxi, wobei sie ihre Taxis jeweils unabhängig und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit aus allen n Taxis der Stadt wählt. Obwohl Annemarie der Parameter n unbekannt ist, weiß sie, dass die Taxis mit fortlaufenden Identifikationsnummern von 1 bis n gekennzeichnet sind. Sei X die größte Identifikationsnummer, die Annemarie während ihrer Fahrten sieht. Um n zu schätzen, verwendet Annemarie die Schätzer $U_1 = X$ und $U_2 = \lceil c \cdot X \rceil$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

(a) Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Parameter c, sodass $n \in [U_1, U_2]$ mit einem Konfidenzniveau von 0,9 gilt.

(b) Angenommen, die größte Identifikationsnummer, die Annemarie sieht, ist 100. Mit welchem maximalen Wert für n darf sie gemäß der ersten Teilaufgabe rechnen?