Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 9
21. Juni 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 1. Juli 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Der Landwirt Alwin züchtet Wassermelonen. Aufgrund einer neuen Melonenverordnung der EU müssen Alwins Melonen fortan in Größe und Farbe einer strengen Norm entsprechen. Abweichungen in Farbe und Größe seien durch zwei unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen X und Y gegeben. Die EU-Norm fordert, dass die Summe der quadratischen Abweichung $Z = X^2 + Y^2$ nicht größer als 4 ist. Bestimmen Sie die Dichte von Z und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Melone die EU-Norm erfüllt.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^\alpha 1/(\sqrt{t \cdot (\alpha - t)})\, dt = \pi$ für $\alpha > 0$ gilt.

Tutoraufgabe 2

Insgesamt beläuft sich die Zebrapopulation Afrikas auf 10^6 Tiere, wobei jedes Zebra unabhängig seiner Artgenossen mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ eine gerade Anzahl an Streifen hat. Für ihre Forschung möchte Alison die Gesamtzahl X der Zebras mit gerader Streifenzahl möglichst genau eingrenzen.

(a) Sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Beweisen Sie die Gleichung $-\Phi(-x) = \Phi(x) - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Approximieren Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes ein möglichst kleines Intervall, das X mit Wahrscheinlichkeit von zirka $9/10$ enthält.

Hinweis: Nutzen Sie für die zweite Teilaufgabe die Abschätzung $\Phi(\sqrt{2}) \approx 19/20$.

Tutoraufgabe 3

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

heißt *logarithmisch normalverteilt* mit den Parametern μ und σ.

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $Y = \ln(X)$ normalverteilt mit den Parametern μ und σ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ gilt.

Hausaufgabe 1 (6 Punkte)

Amira und Baldwin haben sich zur 12-Uhr-Vorlesung vor dem Hörsaal verabredet. Beide treffen um $12 + X$ bzw. $12 + Y$ Uhr kontinuierlicher Zeit am Treffpunkt ein, wobei X und Y unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind. Sie haben abgemacht, maximal eine Viertelstunde aufeinander zu warten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sich Amira und Baldwin vor dem Hörsaal begegnen. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $X - Y$.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von $|Z|$ für eine beliebige Zufallsvariable Z.

(c) Nutzen Sie diese Ergebnisse, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Der verrückte Wissenschaftler Amadeus setzt seine Bakterienkolonie der Größe 1000 radioaktiver Strahlung aus, um eine gewisse Mutation herbeizuführen. Dies gelingt bei jedem Bakterium unabhängig von der übrigen Population mit einer Wahrscheinlichkeit von 1%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens sieben Bakterien mutieren,

(a) exakt

(b) approximativ mittels Poisson-Verteilung

(c) approximativ mit dem Zentralen Grenzwertsatz.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit positivem Wertebereich. Unter diesen Bedingungen folgt aus dem Zentralen Grenzwertsatz, dass für $n \to \infty$ die Summe $\sum_{i=1}^{n} X_i$ normalverteilt ist. Zeigen Sie, dass unter den gleichen Voraussetzungen das Produkt $\prod_{i=1}^{n} X_i$ logarithmisch normalverteilt ist. Dabei ist eine Zufallsvariable X logarithmisch normalverteilt, falls $\ln(X)$ normalverteilt ist (siehe auch Tutoraufgabe 3).

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass aus der Unabhängigkeit von $X_1, \dots, X_n$ die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $\ln(X_1), \dots, \ln(X_n)$ folgt.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X eine mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable.

(a) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion M_X.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von M_X, dass $\mathrm{Var}[X] = 1/\lambda^2$ gilt. Hierzu dürfen Sie die Gleichung $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k]$ verwenden, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $M_X^{(k)}$ die k-te Ableitung der Funktion M_X sei.

Verteilungswerte der Standardnormalverteilung

Diese Tabelle der Standardnormalverteilung enthält die Werte von $\Phi(x)$ für $0 \leq x \leq 2{,}99$. Beispielsweise gilt $\Phi(1{,}55) \approx 0{,}939$.

$\Phi(x)$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999