

---

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

---

*Abgabetermin: 24. Juni 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen*

### Tutoraufgabe 1

Der Drache Ari hat eine Chilischote gegessen, weshalb er einen Feuerball zufälliger Größe spuckt. Sei  $|X|$  der Radius des Feuerballs in Metern gemessen, wobei  $X$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\mu = 0$  und Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{\pi/2}$  ist.

- Bestimmen Sie die Dichte von  $|X|$ .
- Der erwartete Radius von Aris Feuerball beträgt 1 Meter. Wie groß ist die Varianz des Radius in Metern?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Feuerball mehr als  $\pi/\sqrt{2}$  Meter Radius? Sie dürfen für Ihre Antwort die folgenden approximativen Werte der Gauß'schen  $\Phi$ -Funktion nutzen.

$x$	$\sqrt{\pi}/2$	$\sqrt{\pi/2}$	$\sqrt{\pi}$	$\pi/2$	$\pi/\sqrt{2}$	$\pi$
$\Phi(x)$	0,812	0,895	0,962	0,942	0,987	0,999

**Hinweis:** Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt die Identität  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ .

### Tutoraufgabe 2

Für den Heimweg von einem Geschäftstermin hat sich Annemarie wieder einmal ein Taxi bestellt. Aufgrund eines Staus haben allerdings alle Taxis an diesem Tag im Schnitt 10 Minuten Verspätung. Die genaue Verspätung von Annemaries Taxi, gemessen in Minuten, sei durch die exponentialverteilte Zufallsvariable  $X$  gegeben. Angenommen, Annemarie beendet ihren Geschäftstermin 1 Minute vor der geplanten Ankunft des Taxis.

- Als von Natur aus ungeduldige Person kommt Annemarie Wartezeit oft länger vor, als sie tatsächlich ist. Sei  $Y = e^{\alpha X}$  ihre subjektive Wartezeit in Abhängigkeit des Parameters  $\alpha > 0$ . Bestimmen Sie die Dichte von  $Y$ .
- Für welche Werte von  $\alpha$  existiert der Erwartungswert von  $Y$  nicht? Oder anders ausgedrückt, für welche Werte von  $\alpha$  ist Annemaries subjektive mittlere Wartezeit eine sprichwörtliche Ewigkeit?

### Tutoraufgabe 3

Arngard schießt einen Pfeil auf eine Zielscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(0, 0)$ . Als eher mittelmäßige Bogenschützin trifft sie die Zielscheibe zwar immer, allerdings gleichverteilt auf der gesamten Kreisfläche. Die Koordinaten des Treffers seien durch Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  beschrieben, deren gemeinsame Dichte definiert ist durch

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante  $c$ .

**Hinweis:** Verwenden Sie die Stammfunktion  $\frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{1-y^2} \cdot y + \arcsin y \right)$  zur Auswertung des Integrals  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \, dy$ .

(b) Leiten Sie aus der gemeinsamen Dichte  $f_{X,Y}$  die Randdichten  $f_X$  bzw.  $f_Y$  ab.

(c) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?

### Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

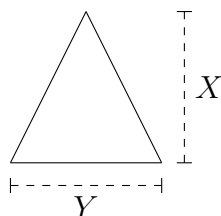
Als Alfred ein Blech frisch gebackener Blaubeermuffins aus dem Ofen holt, erkennt er, dass nicht alle Muffins gleich hoch geworden sind. Er erinnert sich, dass die Höhe  $X$  (in cm) eines Muffins normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 0.25 ist. Die tatsächliche Höhe eines Muffins ist für Alfred entscheidend, da Muffins unter 4.5 cm nicht in den Verkauf gehen, solche höher als 5.5 cm sogar zum doppelten Preis angeboten werden können. Allgemein gilt für den Verkaufspreis eines Muffins:

Höhe	Verkaufspreis
$< 4.5$ cm	0 €
4.5 – 5.5 cm	1 €
$> 5.5$ cm	2 €

- (a) Transformieren Sie  $X$  in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $Y$ .
- (b) Sei  $Z$  der Verkaufspreis eines Blaubeermuffins. Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von  $Z$ .

### Hausaufgabe 2 (6 Punkte)

Der Pharao Aton möchte sich zu Ehren ein 100 Meter hohes und 100 Meter breites Dreieck errichten lassen. Aufgrund von Vermessungsfehlern beträgt die tatsächliche Höhe und Breite des fertiggestellten Bauwerks jedoch  $X$  bzw.  $Y$  Meter, wobei  $X - 99$  und  $Y - 99$  zwei unabhängige und mit Parameter  $\lambda = 1$  exponentialverteilte Zufallsvariablen sind.



- (a) Bestimmen Sie die Dichte von  $X$ .
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit übertrifft Atons Bauwerk die angestrebten Maße sowohl in Höhe als auch in Breite?
- (c) Wie viele Quadratmeter Fläche misst das Dreieck erwartungsgemäß?

### Hausaufgabe 3 (6 Punkte)

Bei einer Forschungsmission sendet der Marsroboter Aurora jede Minute ein Signal zur Kontrollstation auf der Erde. Allerdings ist Auroras Lebensdauer aufgrund harscher Umwelteinflüsse begrenzt. Sei  $X$  eine mit Parameter  $\lambda > 0$  exponentialverteilte Zufallsvariable, die ihre Lebensdauer in Minuten angibt. Des Weiteren sei  $Y = X - \lfloor X \rfloor$  die verstrichene Zeit zwischen Auroras letztem Signal und ihrem Ableben. Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von  $Y$ .

### Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Bei einer Bergtour begegnet Adelheid in unabhängigen und exponentialverteilten Zeitspannen braunen Wolpertingern. Da es sich hierbei um zutrauliche Tiere handelt, trifft sie im Schnitt alle 15 Minuten einen braunen Wolpertinger an. Die scheuen grauen Wolpertinger sieht sie hingegen unabhängig davon erwartungsgemäß nur alle 45 Minuten. Auch hier sind die Zeitspannen zwischen zwei Sichtungen exponentialverteilt und unabhängig.

- (a) Wie lange muss Adelheid im Erwartungswert auf ihre erste Wolpertingersichtung warten?
- (b) Wie lange muss Adelheid unterwegs sein, um insgesamt erwartungsgemäß 20 oder mehr Wolpertinger zu sehen?