Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 7
7. Juni 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 17. Juni 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Anja wirft eine faire Münze abzählbar aber unendlich oft nacheinander. Dabei bezeichnet Ω die Menge aller unendlichen Sequenzen der Ereignisse Kopf und Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass Ω überabzählbar ist.

(b) Sei $\mathcal{A}$ die Menge, die alle Teilmengen $A \subseteq \Omega$ enthält, sodass entweder A oder $\Omega \setminus A$ abzählbar ist. Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

(c) Bestimmen Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß Pr für die Ereignisse aus $\mathcal{A}$. Zeigen Sie insbesondere, dass Pr die Kolmogorov-Axiome erfüllt.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit der folgenden Dichtefunktion, wobei $c > 0$:

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot (1 - x^4) & \text{falls } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass f_X Borel-messbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Konstante c.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Tutoraufgabe 3

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit einer abschnittsweise definierten Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ x & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leq \ln(2) \\ 1 - e^{-x} & \text{falls } x > \ln(2) \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass F_X eine Verteilungsfunktion ist.

(b) Finden Sie die zugehörige Dichtefunktion.

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Sei Ω eine Grundmenge und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Bei der von $\mathcal{M}$ erzeugten σ-Algebra, welche wir mit $\sigma(\mathcal{M})$ bezeichnen, handelt es sich um die kleinste σ-Algebra über Ω, die alle Mengen aus $\mathcal{M}$ enthält. Betrachten Sie die Grundmenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{M})$ für $\mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Ada bricht einen Schokoriegel der Länge ℓ an einer zufälligen Stelle X in zwei Teile, wobei X auf dem Intervall $[0, \ell]$ gleichverteilt ist. Das größere Stück behält Ada für sich. Das kleinere Stück, dessen Länge durch die Zufallsvariable Y beschrieben ist, gibt sie ihrer Schwester Bianca.

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion von Y gegeben ist durch:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y < 0 \\ 2y/\ell & \text{falls } 0 \leq y \leq \ell/2 \\ 1 & \text{falls } \ell/2 < y \end{cases} .$$

(b) Bestimmen Sie die Dichtefunktion und den Erwartungswert von Y.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die Postbotin Anne soll ein Päckchen möglichst pünktlich ausliefern. Hierbei gibt die Zufallsvariable X die zeitliche Abweichung vom Liefertermin an. Die Verteilungsfunktion von X lautet $F_X(x) = 1/(1 + e^{-x})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_X und zeigen Sie, dass f_X achsensymmetrisch zum Ursprung ist, das heißt $f_X(x) = f_X(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Dichtefunktion der Zufallsvariablen $-X$ identisch zur Dichtefunktion von X ist.

(c) Berechnen Sie mit dem Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe Annes erwartete Abweichung vom Liefertermin. Sie dürfen von der Existenz des gesuchten Erwartungswerts ausgehen.

Hausaufgabe 4 (6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie ein Verfahren zur Simulation einer Zufallsvariablen X mit Hilfe einer auf $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariable U kennengelernt. Wenden Sie dieses Verfahren für den Fall an, dass X

(a) auf $[a, b]$ kontinuierlich gleichverteilt ist

(b) exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ist

(c) durch die folgende Dichte bestimmt ist:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Prüfen Sie jeweils zunächst die Voraussetzungen, die das Verfahren an F_X stellt. Geben Sie anschließend eine Zufallsvariable $\tilde{X}$ an, die identisch zu X verteilt ist und als Funktion von U dargestellt werden kann.