Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 6
31. Mai 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 12. Juni 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Aida ist im Besitz zweier gezinkter Münzen a und b. Obwohl beide Münzen äußerlich identisch sind, zeigt a mit einer Wahrscheinlichkeit von $3/4$ Kopf, wohingegen b lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/4$ Kopf zeigt. Leider hat Aida vergessen, welche der Münzen welche ist. Angenommen, Aida wählt zufällig eine der beiden Münzen und wirft diese genau 99-mal. Zeigen Sie mit einer Chernoff-Ungleichung, dass Aida die Münzen mit einer Wahrscheinlichkeit größer gleich $99/100$ korrekt identifizieren kann.

Hinweis: Nutzen Sie die Abschätzungen $e^{101/4} > 9 \cdot 10^{10}$ und $(297/196)^{196/4} < 9 \cdot 10^8$.

Tutoraufgabe 2

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}$. Weiterhin gelte, dass X mit jeweils positiver Wahrscheinlichkeit einen geraden bzw. ungeraden Wert annimmt. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die Markov-Ungleichung nicht scharf ist, dass also $\Pr[X \geq t] < \mathbb{E}[X]/t$ für alle $t > 0$ gilt.

Tutoraufgabe 3

Chamäleon Antonio begibt sich erneut in den Regenwald, um Insekten zu fangen. Nach einem Regentag bricht es jedoch seine Jagd ab. Angenommen, jeder Tag ist unabhängig der vorherigen Tage mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ ein Regentag. Die Anzahl der Insekten Y_i, die es am i-ten Tag fängt, ist unabhängig vorheriger Tage Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = -\ln(1-p)$. Sei die X Länge von Antonios Jagd in Tagen, inklusive des ersten Regentages.

(a) Sei $Z = \sum_{i=1}^{X} Y_i$ die Anzahl der Insekten, die Antonio insgesamt fängt. Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion G_Z.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$. Zeigen Sie insbesondere, dass $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$, wobei Y eine mit Parameter $\lambda = -\ln(1-p)$ Poisson-verteilte Zufallsvariable ist.

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Die Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie wird von 734 Studierenden gehört. Aus Erfahrung weiß die Übungsleitung jedoch, dass im Schnitt lediglich drei von vier Studierenden die Semestralklausur mitschreiben. Da die Übungsleitung umweltbewusst ist, möchte sie möglichst wenig Klausurangaben drucken. Es wird angenommen, dass die Studierenden ihre Entscheidung, die Klausur zu schreiben, unabhängig voneinander treffen. Bestimmen Sie eine Mindestanzahl an Angaben, die die Übungsleitung bereitstellen muss, sodass diese mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10% nicht ausreichen.

Hinweis: Nutzen Sie die erste Chernoff-Schranke aus Korollar 68 der Vorlesung.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Ein fairer Würfel werde n-mal geworfen. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei mindestens $n/4$ Einsen fallen, mit der Markov-, Chebyshev- und einer geeigneten Chernoff-Ungleichung ab.

Hausaufgabe 3 (7 Punkte)

Der Waschbär Andreas ernährt sich am liebsten von Kirschen. Pro Tag erbeutet Andreas eine zufällige Anzahl X der köstlichen Früchte. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X ist definiert als:

$$G_X(s) = \exp\left(8 \cdot (s^2 - 1)\right) .$$

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(b) Nutzen Sie die Chebyshev-Ungleichung um zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der Andreas mindestens 32 Kirschen an einem Tag findet, höchstens 1/8 ist.

(c) Sei M_X die momenterzeugende Funktion von X und $t > 0$, $s \geq 0$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{M_X(s)}{\exp(s \cdot t)}$$

und verbessern Sie damit die Abschätzung aus (b) zu $\Pr[X \geq 32] \leq (e/4)^8 \approx 0.04$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ und sei G_X die zugehörige wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion. Sei E das Ereignis, dass X einen geraden Wert annimmt.

(a) Beweisen Sie, dass $\Pr[E] = \frac{1+G_X(-1)}{2}$ gilt.

(b) Angenommen, die Zufallsvariable X sei

(i) binomial-

(ii) geometrisch

(iii) Poisson-

verteilt. Welche Bedingungen müssen für die Parameter der jeweiligen Verteilung gelten, damit $\Pr[E] > \Pr[\bar{E}]$ gilt?