Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 5
24. Mai 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 3. Juni 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Das Chamäleon Antonio begegnet jeden Tag X Insekten, wobei X mit Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilt ist. Allerdings gelingt es Antonio lediglich mit Wahrscheinlichkeit $0 < p \leq 1$, ein Insekt einzufangen. Sei Y die Gesamtzahl der gefangenen Insekten. Bestimmen Sie die Verteilung von Y sowie den Erwartungswert und die Varianz.

Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

Tutoraufgabe 2

Sie untersuchen eine radioaktive Probe, die pro Sekunde $3 \cdot 10^{10}$ Teilchen emittiert. Ihr Geigerzähler registriert jedes Teilchen unabhängig mit einer Wahrscheinlichkeit von 10^{-10}.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden x Teilchen in einer Sekunde detektiert?

(b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Geigerzähler pro Sekunde mehr als drei Teilchen registriert, geeignet ab.

(c) Angenommen, Sie stellen eine zweite Probe neben den Geigerzähler, die unabhängig von der ersten $6 \cdot 10^{10}$ Teilchen pro Sekunde emittiert. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Teilchen, die insgesamt registriert werden.

Tutoraufgabe 3

Die lokale Erdmännchenpopulation eines afrikanischen Nationalparks besteht aus n Tieren. Während ihrer Forschungsreise möchte die Biologin Alison die Erdmännchen genauer erforschen. Hierfür muss sie insgesamt m unterschiedliche Tiere fangen und untersuchen. Hat Alison ein Erdmännchen eingefangen und untersucht, so entlässt sie es wieder in die Wildnis, bevor sie das nächste fängt. Wir nehmen an, dass Alison jedes der n Erdmännchen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit und unabhängig von vorherigen Untersuchungen fängt.

(a) Sei X_i eine Zufallsvariable, die angibt, wie oft das i-te Erdmännchen untersucht wird. Berechnen Sie den Erwartungswert von X_i.

(b) Da die Erdmännchen nicht untersucht werden wollen, senden sie eine zufällige Delegation der Größe $k \geq m$, die sich Alison stellt. Der Rest versteckt sich. Angenommen, jede Delegation der Größe k ist gleich wahrscheinlich und Alison möchte weiterhin m verschiedene Tiere untersuchen. Wie sollte k gewählt werden, sodass jedes Erdmännchen seine erwartete Anzahl an Untersuchungen minimiert?

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Für die Fahrt zu einem wichtigen Geschäftstermin bestellt Annemarie ein Taxi. Laut Taxiunternehmen soll das Taxi erwartungsgemäß in μ Minuten ankommen. Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable, die Annemaries Wartezeit in Minuten angibt. Nach i Minuten wird Annemarie ungeduldig und ruft das Taxiunternehmen an, um nach ihrer verbleibenden Wartezeit $X - i$ zu fragen. Zeigen Sie, dass ihre erwartete verbleibende Wartezeit immer noch μ Minuten beträgt, das heißt $\mathbb{E}[X - i \mid X > i] = \mu$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Am nächsten Tag bestellt Annemarie zur Sicherheit gleich n Taxis bei unterschiedlichen Anbietern und steigt in das Taxi ein, das am frühesten eintrifft. Die Wartezeit in Minuten für das i-te Taxi ($1 \leq i \leq n$) sei X_i, eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter p_i. Die Zufallsvariablen X_i seien unabhängig. Zeigen Sie, dass Annemaries Wartezeit $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ geometrisch verteilt ist, und bestimmen Sie den Parameter.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

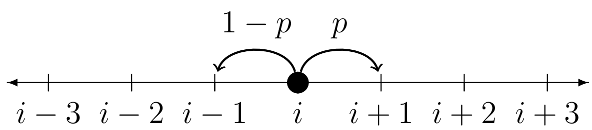
Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich $W_X = \mathbb{N}_0$, sodass $f_X(x) = \frac{2}{x} \cdot f_X(x-1)$ für $x \in \mathbb{N}$ gilt.

(a) Um welche (aus der Vorlesung bekannte) Verteilung handelt es sich? Wie lauten die Parameter?

(b) Welche Zahlen $x \in \mathbb{N}_0$ treten mit der höchsten Wahrscheinlichkeit auf?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Ein Floh bewegt sich zufällig auf dem Zahlenstrahl der Menge $\mathbb{Z}$. Dabei hüpft er von einer Zahl i mit Wahrscheinlichkeit p nach rechts (auf $i + 1$), andernfalls nach links (auf $i - 1$). Dies geschieht unabhängig von den bisherigen Sprüngen. Der Floh startet auf Position 0.



(a) Sei X_n die Position nach n Sprüngen. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_n.

Hinweis: Betrachten Sie die Indikatorvariablen Y_i für $1 \leq i \leq n$, wobei $Y_i = 1$ ist gdw. der i-te Sprung nach rechts geht.

(b) Wann verlässt der Floh erwartungsgemäß das Intervall $[-1, 1]$ zum ersten Mal?