Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 4
17. Mai 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 27. Mai 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Bei einem Test stellt die DWT-Tutorin Angelika ihren Studierenden drei Aufgaben. Pro richtig gelöster Aufgabe vergibt Angelika einen Punkt. Ist die Lösung einer Aufgabe hingegen falsch, so gibt es keinen Punkt für die Aufgabe. Angenommen, die Studierenden erzielen die Punkte im Test zufällig. Sei X_i die Punktzahl aus der i-ten Aufgabe und

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} (x_1+x_2+x_3-1)^2/8 & \text{für } x_1,x_2,x_3 \in \{0,1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die gemeinsame Dichte.

(a) Bestimmen Sie die Randdichten f_{X_1}, f_{X_2} und f_{X_3}.

(b) Sind die Zufallsvariablen X_i unabhängig?

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

Tutoraufgabe 2

Seien X und Y beliebige diskrete Zufallsvariablen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen, so sind auch X^2 und Y^2 unabhängig.

(b) Sind X^2 und Y^2 unabhängige Zufallsvariablen, so sind auch X^3 und Y^3 unabhängig.

Tutoraufgabe 3

Bei einer Lotterie kauft Anette so lange Lose, bis sie n-mal gewonnen hat. Angenommen, jedes Los ist unabhängig der anderen Lose mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ ein Gewinn und ansonsten eine Niete. Sei X_i die Anzahl der Nieten zwischen Anettes $(i-1)$-ten und i-ten Gewinn. Die Gesamtanzahl der Nieten ist $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Beweisen Sie mit Hilfe der Faltungsformel und Induktion, dass die Dichte von Y_n gegeben ist durch

$$f_{Y_n}(y) = \begin{cases} \binom{y+n-1}{y} \cdot p^n \cdot (1-p)^y & \text{für } y \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass die Zufallsvariablen Y_n und X_{n+1} unabhängig sind.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

In *Balduins Briefmarkenbörse* ist nur wenig los: Täglich kommen bis zu zwei Personen, um Briefmarken des Wertes 50 ct oder 100 ct zu kaufen. Manchmal verlässt sogar eine Person den Laden wieder, ohne etwas zu kaufen. Die Anzahl der Personen pro Tag sei durch eine Zufallsvariable X mit Dichte $f_X(0) = 0.3$, $f_X(1) = 0.5$, $f_X(2) = 0.2$ und $f_X(x) = 0$ für $x \notin \{0, 1, 2\}$ beschrieben. Weiterhin seien Y Balduins tägliche Einnahmen. Die folgende Tabelle zeigt die Werte von $f_{Y|X=x}(y)$.

x \ y	0	50	100	150	200
0	1	0	0	0	0
1	0.1	0.7	0.2	0	0
2	0.01	0.14	0.53	α	0.04

Weiterhin gilt $f_{Y|X=x}(y) = 0$ für $y \notin \{0, 50, 100, 150, 200\}$ und $x \in \{0, 1, 2\}$.

(a) Bestimmen Sie den fehlenden Wert α in der Tabelle.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit betragen die Tageseinnahmen höchstens 50 ct?
Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Person für 100 ct eingekauft hat und diese die einzige Kundin an dem Tag war?

(c) Bestimmen Sie die Dichte von Y. Sind X und Y unabhängig?

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Bei einer nachmittäglichen Gameshow drehen die Kandidaten Anaïs und Batiste nacheinander ein Glücksrad mit n gleich großen Feldern. Auf den Feldern des Glücksrads stehen die Zahlen von 1 bis n. Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen, die dem Ergebnis von Anaïs' bzw. Bastites Drehung entsprechen. Falls $X \geq Y$, bekommt Anaïs $X - Y$ von Batistes hart erkämpften Punkten. Im Fall $Y > X$, muss Anaïs $Y - X$ ihrer Punkte an Batiste abgeben. Sei $Z = X - Y$ Anaïs' Gewinn bzw. Verlust. Berechnen Sie unter Zuhilfenahme der Faltungsformel die Dichte von Z. Sie dürfen davon ausgehen, dass jeder Ausgang einer Drehung gleich wahrscheinlich ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Anne spielt das folgende Spiel: Aus einer Urne mit n Kugeln, die von 1 bis n beschriftet sind, werden gleichverteilt und ohne Zurücklegen Kugeln gezogen. Das Spiel ist beendet, sobald eine Kugel mit kleinerer Nummer als die vorherige gezogen wird. Für jede gezogene Kugel erhält Anne 1 Euro.

(a) Sei die Indikatorvariable X_k für $1 \leq k \leq n$ wie folgt definiert:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{falls Anne mindestens } k \text{ Euro gewinnt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die Dichte von X_k.

(b) Wie hoch ist Annes erwarteter Gewinn? Welcher Erwartungswert ergibt sich für $n \to \infty$?

Hausaufgabe 4 (6 Punkte)

Seien X und Y zwei unabhängige, diskrete und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$. Bestimmen Sie die Dichte und die Verteilung von $\max\{X, Y\}$ und $\min\{X, Y\}$ in Abhängigkeit von $f(x)$ und $F(x)$.