Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 3
10. Mai 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 20. Mai 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die Eckpunkte des dreidimensionalen Einheitswürfels, aus denen wir zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Ecke auswählen. Außerdem definieren wir eine Zufallsvariable $X : \{0,1\}^3 \to \mathbb{R}$, welche jeden Eckpunkt des Würfels auf seine euklidische Norm abbildet. Es gilt also $X(p) = \|p\|_2$. Bestimmen Sie die Dichte, die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz von X.

Tutoraufgabe 2

Agathe und Balthasar werfen abwechselnd eine Münze, bis zum ersten Mal Kopf fällt. Sei n die Anzahl der Würfe bis zum Spielende. Als Zahlungsschema schlägt Agathe vor, dass der Verlierer dem Gewinner $2^n/n$ Euro zahlt. Angenommen, Agathe macht den ersten Wurf und die Wahrscheinlichkeit für Kopf beträgt $1/2$.

(a) Sei X Agathes Gewinn, wobei X negativ ist, falls Agathe verliert. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von X nicht existiert.

(b) Konstruieren Sie ein alternatives Zahlungsschema, sodass der Erwartungswert von Agathes Gewinn existiert, die Varianz aber nicht.

Tutoraufgabe 3

Alan besitzt ein Deck mit n Karten, bei dem die gegenüberliegenden Seiten der i-ten Karte jeweils mit der Zahl 2^{i-1} bzw. 2^i bedruckt sind. Nachdem er die Karten gemischt und gestapelt hat, zeigt er seinem Freund Benedikt die Oberseite des Stapels. Sei X die abgebildete Zahl.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X unter der Annahme, dass jede der $2n$ Kartenseiten gleich wahrscheinlich auf der Oberseite des Stapels zu sehen ist.

(b) Da Benedikt Geburtstag hat, macht Alan ihm das folgende Angebot: Entweder er schenkt ihm sofort X Euro, oder er lässt Benedikt die oberste Karte umdrehen und schenkt ihm den Betrag auf der Rückseite. Angenommen, Benedikts einzige Information über die Reihenfolge der Karten im Stapel ist die Oberseite der obersten Karte. Wie sollte er sich entscheiden? Zeigen Sie, dass Benedikt mit einer geeigneten Strategie mehr als $\mathbb{E}[X]$ Euro erwarten kann.

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Die Schachfigur Amalia erkundet ein Schachbrett mit 8×8 Feldern. Da Amalia ein Läufer ist, kann sie in jedem Zug alle Felder erreichen, die über eine Diagonale mit ihrem Feld verbunden sind. Angenommen, Amalia befindet sich auf einem zufällig gewählten Feld des Schachbretts, wobei alle 64 Felder gleich wahrscheinlich sind. Sei X die Anzahl der Felder, die Amalia in einem Zug erreichen kann. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Hausaufgabe 2 (6 Punkte)

Der Waschmittelhersteller `OSOREIN` verschenkt auf einer Messe Proben seines neuesten Produkts. In einer Wäschetrommel befinden sich sieben Kugeln, die mit jeweils einem Buchstaben des Herstellernamens beschriftet sind. Die Spieler ziehen so lange gleichverteilt und ohne zurückzulegen Kugeln, bis sie im Besitz beider `O`s sind – pro gezogener Kugel erhalten sie dann eine Produktprobe. Sei X eine Zufallsvariable für die Anzahl der gewonnenen Proben.

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich, die Dichte und die Verteilung von X. Finden Sie insbesondere zwei Konstanten a und b, sodass $f_X(k) = (k-a)/b$ für $k \in W_X$ gilt.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Der Wetterfrosch Aminata weiß, dass es am Wochenende mit Wahrscheinlichkeit p regnet. Vor einer Freundin behauptet sie jedoch, die Regenwahrscheinlichkeit sei q, und schließt mit ihr die folgende Wette ab: Regnet es tatsächlich, so gewinnt Aminata q Euro, andernfalls $1-q$ Euro.

(a) Wie sollte Aminata q (in Abhängigkeit von p) wählen, um ihren erwarteten Gewinn zu maximieren?

(b) Die beiden einigen sich auf ein alternatives Auszahlungsschema: Aminata erhält $q \cdot (c-q)$ bei Regen bzw. $1-q^2$ sonst, wobei c eine Konstante ist. Bestimmen Sie ein c, sodass sich Ehrlichkeit für Aminata auszahlt, d.h. ihr erwarteter Gewinn durch die Angabe des tatsächlichen Wertes $q = p$ maximiert wird.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Var}[X+Y] + \mathrm{Var}[X-Y] = 2\cdot\mathrm{Var}[X] + 2\cdot\mathrm{Var}[Y]$

(b) Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt

$$\mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)] = \mathbb{E}[X+Y] \cdot \mathbb{E}[X-Y]$$

Hinweis: Benutzen Sie die Sätze 39 und 50 aus der Vorlesung.