Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 2
3. Mai 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 13. Mai 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Zur Vorbereitung auf die DWT-Klausur teilen sich die Studentinnen Anna, Bea und Carola zusammen mit ihren Kommilitonen David, Emil und Felix zufällig in 3 disjunkte Lerngruppen aus jeweils 2 Personen auf. Hierbei sind alle Aufteilungen gleich wahrscheinlich.

(a) Zeigen Sie, dass es 15 Möglichkeiten gibt, die 6 Personen in Zweiergruppen zu partitionieren.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der alle Lerngruppen gemischt sind, d.h. jede Lerngruppe aus einer Studentin und einem Studenten besteht.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Lerngruppen gemischt, falls Anna und David eine gemeinsame Lerngruppe bilden?

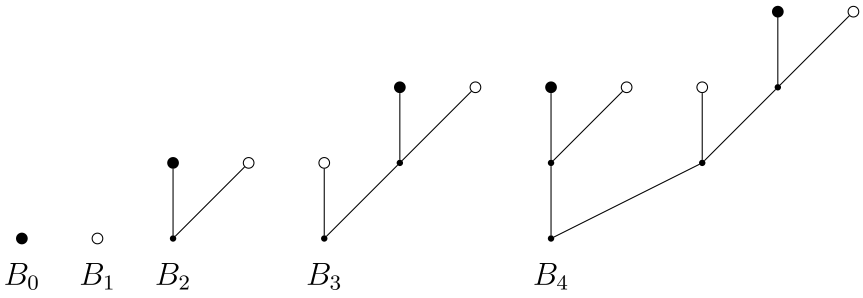
(d) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Vereinigung der beiden Ereignisse „Anna und David bilden eine Lerngruppe“ bzw. „Bea und Carola bilden eine Lerngruppe“ ist unabhängig vom Ereignis, dass alle Lerngruppen gemischt sind.

Tutoraufgabe 2

Antonia wirft eine faire Münze n mal nacheinander, wobei $n \geq 2$ gilt. Sei E das Ereignis, dass sowohl Kopf als auch Zahl geworfen wird, und F das Ereignis, dass höchstens einmal Kopf geworfen wird. Angenommen E und F sind unabhängig. Wie oft hat Antonia die Münze geworfen?

Tutoraufgabe 3

Der Koalabär Ari möchte ein Blatt des Binäreukalyptus B_n essen. Hierfür erklimmt er B_n entlang eines zufälligen Pfads von der Wurzel zu den Blättern gemäß der folgenden Regel: Der Binäreukalyptus B_0 bzw. B_1 besteht aus einem schwarzen bzw. weißen Blatt, welches gleichzeitig die Wurzel ist. In diesem Fall hat Ari sein Ziel erreicht und muss nicht klettern. Für $n > 1$ besteht B_n aus zwei Binäreukalypten B_{n-1} und B_{n-2}, die an der Wurzel über einen Ast mit der Wurzel von B_n verbunden sind. Ari wählt zufällig und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zwischen den beiden Teilbäumen und klettert zur Wurzel von B_{n-1} bzw. B_{n-2}, wo er den Prozess wiederholt. Die Skizze zeigt exemplarisch die Struktur der Binäreukalypten B_0 bis B_4.



Bezeichne E_n das Ereignis, dass Aris Kletterpartie an einem weißen Blatt endet. Zeigen Sie, dass $\Pr[E_n] = 2/3 \cdot (1 - (-1/2)^n)$.

Hausaufgabe 1 (6 Punkte)

Die sechs Felder des unten stehenden Gitters werden mit den Zahlen $1, 3, 4, 4, 7$ und 8 gefüllt. Sei Ω die Menge aller unterschiedlichen (2×3)-Matrizen, die auf diese Weise entstehen können. Dabei trete jede Matrix $\omega \in \Omega$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in Ω.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten beide Vieren in der gleichen Zeile auf?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die obere Zeilensumme kleiner als die untere, wenn die obere Zeile 4 und 8 enthält?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum über der Ergebnismenge Ω.

(a) Seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $A \subset B$. Wann sind A und B unabhängig? Betrachten Sie alle möglichen Fälle.

(b) Seien $C, D \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $\Pr[D] > 0$ und $\Pr[C|D] > \Pr[C]$. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage $\Pr[C|\overline{D}] < \Pr[C]$.

(c) Eine Familie von Ereignissen $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ wird paarweise unabhängig genannt, wenn für alle Indizes $i \neq j$ die Ereignisse E_i und E_j unabhängig sind. Beweisen oder widerlegen Sie, dass eine Familie paarweise unabhängiger Ereignisse unabhängig ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Um seine beliebten Blaubeermuffins zu backen, hat Konditor Alfred vier Schachteln Blaubeeren bestellt. Allerdings ist sein Händler etwas unzuverlässig und liefert ihm manchmal Schachteln mit Himbeeren. Aus Erfahrung weiß Alfred, dass er bei seiner Bestellung mit Wahrscheinlichkeit 0.1, 0.08, 0.05 bzw. 0.12 eine, zwei, drei bzw. vier Schachteln Himbeeren erhält. Als er eine zufällig und gleichverteilt ausgewählte Schachtel seiner Bestellung öffnet, findet er zu seinem Erschrecken Himbeeren vor. Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als die Hälfte der vier Schachteln Himbeeren enthalten?

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

In der Küche der Sushiköchin Akiko stehen zwei Aquarien. Im ersten Aquarium befinden sich 8 Hummer und 5 Langusten. Im zweiten Aquarium befinden sich 7 Hummer, 3 Langusten und 5 Garnelen. Für das Sushi des Tages entnimmt Akiko jedem der beiden Aquarien zufällig und unabhängig voneinander ein Schalentier, wobei alle Schalentiere eines Aquariums mit der gleichen Wahrscheinlichkeit als Sushi enden. Angenommen das Sushi des Tages besteht aus Hummer und Languste, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Hummer aus dem ersten Aquarium?