Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Leon Ladewig, Luisa Peter, Jens Quedenfeld

Sommersemester 2019
Übungsblatt 1
26. April 2019

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 6. Mai 2019, 10 Uhr, DWT Briefkästen

Tutoraufgabe 1

Die drei Rennpferde Anastasia, Beatrix und Cameron treten in einem Rennen gegeneinander an. Konstruieren Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum für den Ausgang des Rennens, sodass die Ereignisse „Anastasia erreicht das Ziel vor Beatrix", „Beatrix erreicht das Ziel vor Cameron" und „Cameron erreicht das Ziel vor Anastasia" jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1/2$ eintreten.

Hinweis: Sie dürfen vereinfachend davon ausgehen, dass es keinen Gleichstand zwischen den Pferden gibt.

Tutoraufgabe 2

Agathe und Balthasar spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd eine Münze werfen. Der Spieler, der zuerst Zahl wirft, gewinnt und beendet das Spiel. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf sei $0 < p < 1$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Agathe bzw. Balthasar das Spiel für sich entscheidet, wenn Agathe den ersten Wurf macht? Ist das Spiel fair?

Tutoraufgabe 3

Der Konditor Alfred möchte für einen prestigeträchtigen Backwettbewerb m Blaubeermuffins zubereiten. Dazu gibt er n Blaubeeren in den Muffinteig und teilt diesen nach gründlichem Rühren gleichmäßig auf m Formen auf. Angenommen jede Blaubeere kommt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in jeden der m Muffins.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält Alfreds i-ter Muffin keine Blaubeeren?

(b) Damit ein Muffin eine echter Blaubeermuffin ist, muss er mindestens eine Blaubeere enthalten. Sei E das Ereignis, dass alle m Muffins echte Blaubeermuffins sind. Finden Sie mit Hilfe der Siebformel einen Ausdruck zur Berechnung von $\Pr[E]$.

(c) Angenommen Alfred backt sechs Muffins. Bestimmen Sie mit einem Taschenrechner oder Computer die Mindestanzahl an Blaubeeren, die Alfred in den Teig geben muss, sodass $\Pr[E] > 9/10$.

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten ein Glücksrad, das mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 150 beschriftet ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad auf einer Zahl stehen bleibt, die

(a) durch 4 oder 9 (oder beides) teilbar ist

(b) eine Quersumme größer als 3 hat.

Wir nehmen dabei an, dass jede Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt.

Hausaufgabe 2 (6 Punkte)

Bei einer Forschungsreise durch Afrika fällt der Biologin Alison auf, dass Zebras mit einer geraden Streifenzahl doppelt so häufig vorkommen wie Zebras mit einer ungeraden Streifenzahl. Sei E_n das Ereignis, dass ein zufällig ausgewähltes Zebra genau n Streifen hat. Modellieren Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, der dem Ereignis E_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnet und der gleichzeitig Alisons Beobachtung entspricht. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Hausaufgabe 3 (6 Punkte)

Die DWT-Tutorin Angelika betreut eine Übungsgruppe, in der n Hausaufgaben ohne Namen abgegeben wurden. Nach der Korrektur teilt Angelika die namenlosen Blätter daher zufällig an die n vergesslichen Studierenden aus. Angenommen alle Zuordnungen von Hausaufgaben an Studierende sind gleich wahrscheinlich. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt Angelika niemandem die eigene Hausaufgabe zurück? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$?

Hinweis: Benutzen Sie die Siebformel aus der Vorlesung und machen Sie sich mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion vertraut.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Agathe und Balthasar stehen allein am U-Bahnhof Marienplatz, von wo alle 10 Minuten eine U-Bahn abfährt. Leider sind die Züge so überfüllt, dass immer nur eine Person einsteigen kann. Dies gelingt jeder Person am Bahnsteig mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Zusätzlich treffen in der Zeit bis zur nächsten U-Bahn jeweils zwei neue Personen an der Haltestelle ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Agathe

(a) in die n-te U-Bahn

(b) spätestens in die n-te U-Bahn

einsteigen kann, wobei $n \in \mathbb{N}$ sei.