Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

Was messen wir?

- Speicherverbrauch
- Laufzeit
- Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- Festplattenzugriffe
- Programmgröße
- Energieverbrauch
- ...

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

Was messen wir?

- Speicherverbrauch
- Laufzeit
- Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- Festplattenzugriffe
- Programmgröße
- Energieverbrauch
- ...

5

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

Was messen wir?

- Speicherverbrauch
- Laufzeit
- Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- Festplattenzugriffe
- Programmgröße
- Energieverbrauch
- ...

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

Was messen wir?

- Speicherverbrauch
- Laufzeit
- Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- Festplattenzugriffe
- Programmgröße
- Energieverbrauch
- ...

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

Was messen wir?

- Speicherverbrauch
- Laufzeit
- Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- Festplattenzugriffe
- Programmgröße
- Energieverbrauch
- ...

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

Was messen wir?

- Speicherverbrauch
- Laufzeit
- Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- Festplattenzugriffe
- Programmgröße
- Energieverbrauch
- ...

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

Was messen wir?

- Speicherverbrauch
- Laufzeit
- Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- Festplattenzugriffe
- Programmgröße
- Energieverbrauch
- ...

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

Was messen wir?

- Speicherverbrauch
- Laufzeit
- Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- Festplattenzugriffe
- Programmgröße
- Energieverbrauch
- ...

Wie messen wir?

- Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - Welche Eingaben?
  - Kann sehr aufwendig sein.
  - Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.

- Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.

Wie messen wir?

- Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - Welche Eingaben?
  - Kann sehr aufwendig sein.
  - Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.

- Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.

Wie messen wir?

- Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - Welche Eingaben?
  - Kann sehr aufwendig sein.
  - Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.

- Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.

Wie messen wir?

- Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - Welche Eingaben?
  - Kann sehr aufwendig sein.
  - Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.

Wie messen wir?

- Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - Welche Eingaben?
  - Kann sehr aufwendig sein.
  - Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.

Wie messen wir?

- Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - Welche Eingaben?
  - Kann sehr aufwendig sein.
  - Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.
  - Gibt asymptotische Garantien wie z.B. „dieser Algorithmus läuft immer in Zeit $\mathcal{O}(n^2)$“.
  - Üblicherweise wird der worst case betrachtet.
  - Man kann auch untere Schranken erhalten: „jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt im worst case mindestens $\Omega(n \log n)$ Vergleiche“.

Wie messen wir?

- Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - Welche Eingaben?
  - Kann sehr aufwendig sein.
  - Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.

- Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.
  - Gibt asymptotische Garantien wie z.B. „dieser Algorithmus läuft immer in Zeit $\mathcal{O}(n^2)$“.
  - Üblicherweise wird der worst case betrachtet.
  - Man kann auch untere Schranken erhalten: „jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt im worst case mindestens $\Omega(n \log n)$ Vergleiche“.

Wie messen wir?

- Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - Welche Eingaben?
  - Kann sehr aufwendig sein.
  - Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.

- Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.
  - Gibt asymptotische Garantien wie z.B. „dieser Algorithmus läuft immer in Zeit $\mathcal{O}(n^2)$“.
  - Üblicherweise wird der worst case betrachtet.
  - Man kann auch untere Schranken erhalten: „jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt im worst case mindestens $\Omega(n \log n)$ Vergleiche“.

Wie messen wir?

- Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - Welche Eingaben?
  - Kann sehr aufwendig sein.
  - Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.

- Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.
  - Gibt asymptotische Garantien wie z.B. „dieser Algorithmus läuft immer in Zeit $\mathcal{O}(n^2)$“.
  - Üblicherweise wird der worst case betrachtet.
  - Man kann auch untere Schranken erhalten: „jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt im worst case mindestens $\Omega(n \log n)$ Vergleiche“.

Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Eingabelänge auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die Eingabelänge ist z.B.

- die Größe der Eingabe (Anzahl an bits)
- die Anzahl der Argumente

Beispiel:

Angenommen n Zahlen aus dem Bereich $\{1, \ldots, N\}$ sollen sortiert werden. Wir sagen üblicherweise, dass die Eingabelänge n ist, anstatt z.B. $n \log N$, was der Anzahl an bits entsprechen würde.

Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Eingabelänge auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die Eingabelänge ist z.B.

- die Größe der Eingabe (Anzahl an bits)
- die Anzahl der Argumente

Beispiel:

Angenommen es Zahlen aus dem Bereich $\{1, \ldots, N\}$ sollen sortiert werden. Wir sagen üblicherweise, dass die Eingabelänge n ist, anstatt z.B. $\log N$, was der Anzahl an bits entsprechen würde.

Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Eingabelänge auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die Eingabelänge ist z.B.

- die Größe der Eingabe (Anzahl an bits)
- die Anzahl der Argumente

Example 1

Angenommen n Zahlen aus dem Bereich $\{1, \ldots, N\}$ sollen sortiert werden. Wir sagen üblicherweise, dass die Eingabelänge n ist, anstatt z.B. $n \log N$, was der Anzahl an Bits entsprechen würde.

Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Eingabelänge auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die Eingabelänge ist z.B.

- die Größe der Eingabe (Anzahl an bits)
- die Anzahl der Argumente

Example 1

Angenommen n Zahlen aus dem Bereich $\{1, \ldots, N\}$ sollen sortiert werden. Wir sagen üblicherweise, dass die Eingabelänge n ist, anstatt z.B. $n \log N$, was der Anzahl an Bits entsprechen würde.

Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Eingabelänge auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die Eingabelänge ist z.B.

- die Größe der Eingabe (Anzahl an bits)
- die Anzahl der Argumente

Example 1

Angenommen n Zahlen aus dem Bereich $\{1, \ldots, N\}$ sollen sortiert werden. Wir sagen üblicherweise, dass die Eingabelänge n ist, anstatt z.B. $n \log N$, was der Anzahl an Bits entsprechen würde.

Rechenmodell

Wie messen wir

- Berechne die Laufzeit in einem idealisierten Rechenmodell (z.B. Random Access Machine (RAM))
- Berechne Anzahl von Basisoperationen wie z.B. Anzahl an Vergleichen, Multiplikationen, Festplattenzugriffen etc.

Rechenmodell

Wie messen wir

1. Berechne die Laufzeit in einem idealisierten Rechenmodell (z.B. Random Access Machine (RAM))
2. Berechne Anzahl von Basisoperationen wie z.B. Anzahl an Vergleichen, Multiplikationen, Festplattenzugriffen etc.

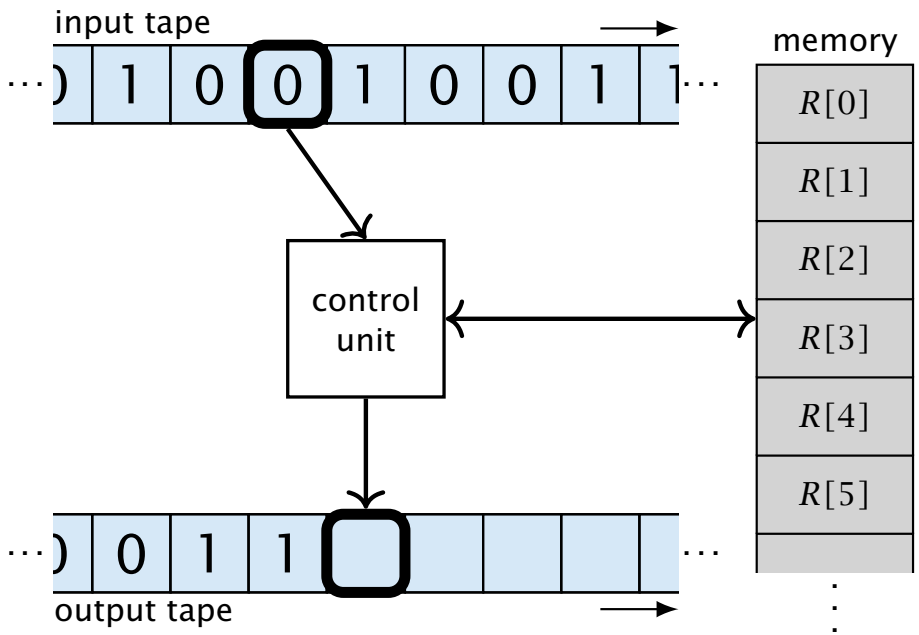
Rechenmodell

Wie messen wir

1. Berechne die Laufzeit in einem idealisierten Rechenmodell (z.B. Random Access Machine (RAM))
2. Berechne Anzahl von Basisoperationen wie z.B. Anzahl an Vergleichen, Multiplikationen, Festplattenzugriffen etc.

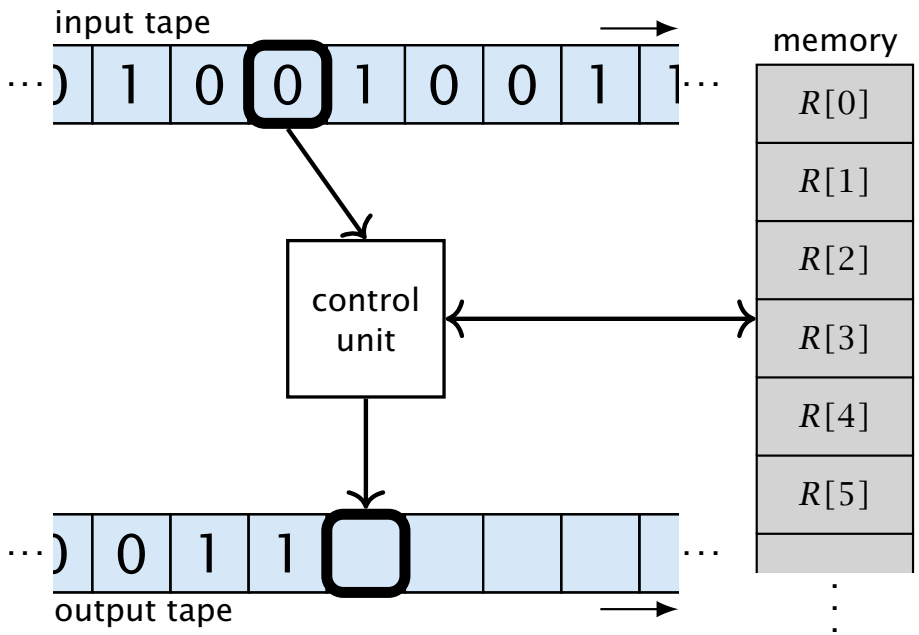
Random Access Machine (RAM)

- Ein- und Ausgabeband (Folge von Einsen und Nullen; unbeschränkte Länge).
- Speicher: unendlich viele Register $R[0], R[1], R[2], \ldots$.
- Register können beliebige Integer speichern.
- Indirekte Adressierung.



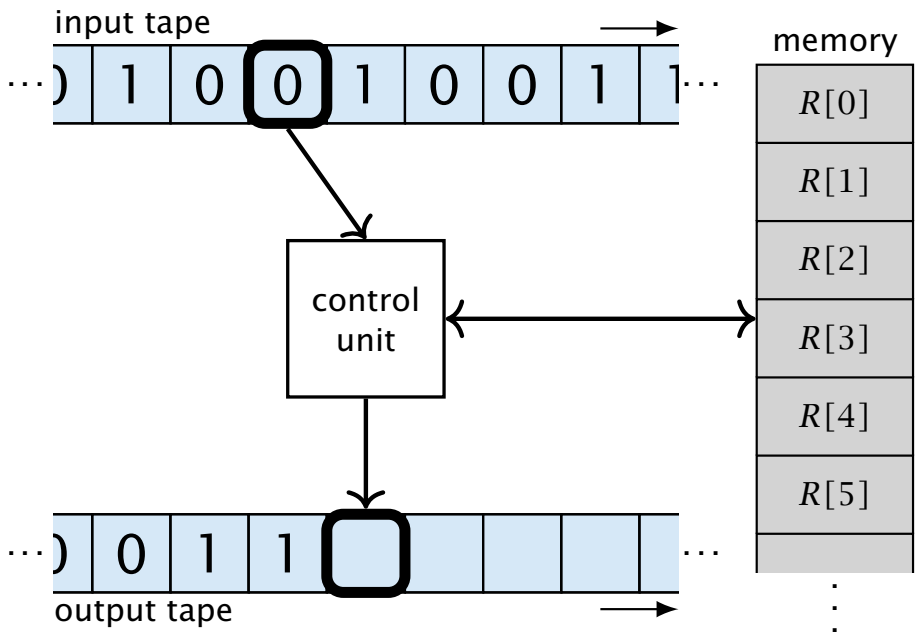
Random Access Machine (RAM)

- Ein- und Ausgabeband (Folge von Einsen und Nullen; unbeschränkte Länge).
- Speicher: unendlich viele Register $R[0], R[1], R[2], \ldots$.
- Register können beliebige Integer speichern.
- Indirekte Adressierung.



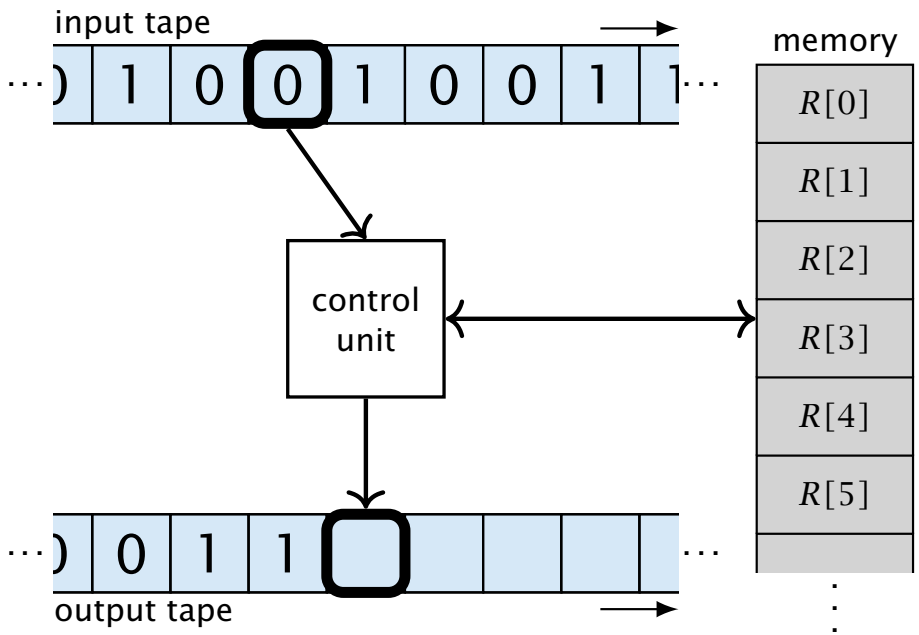
Random Access Machine (RAM)

- Ein- und Ausgabeband (Folge von Einsen und Nullen; unbeschränkte Länge).
- Speicher: unendlich viele Register $R[0], R[1], R[2], \ldots$.
- Register können beliebige Integer speichern.
- Indirekte Adressierung.



Random Access Machine (RAM)

- Ein- und Ausgabeband (Folge von Einsen und Nullen; unbeschränkte Länge).
- Speicher: unendlich viele Register $R[0], R[1], R[2], \ldots$.
- Register können beliebige Integer speichern.
- Indirekte Adressierung.



Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
  - $R[i] := R[j]$
  - $R[i] := j$
- **indirekte** Adressierung
  - $R[i] := R[R[j]]$
    kopiert den Inhalt des $R[j]$-ten Registers in das i-te Register.
  - $R[R[i]] := R[j]$
    kopiert den Inhalt des j-ten Registers in das $R[i]$-te Register.

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
  - $R[i] := R[j]$
  - $R[i] := c$
- **indirekte** Adressierung
  - $R[i] := R[R[j]]$
    Lade den Inhalt des $R[j]$-ten Registers in das i-te Register.
  - $R[R[i]] := R[j]$
    Lade den Inhalt des j-ten Registers in das $R[i]$-te Register.

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
- **indirekte** Adressierung

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
- **indirekte** Adressierung

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
  - $R[j] := R[i]$
  - $R[j] := 4$
- **indirekte** Adressierung

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
  - $R[j]$:= $R[i]$
  - $R[j]$:= 4
- **indirekte** Adressierung

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
  - $R[j]$:= $R[i]$
  - $R[j]$:= 4
- **indirekte** Adressierung

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
  - $R[j] := R[i]$
  - $R[j] := 4$
- **indirekte** Adressierung
  - $R[j] := R[R[i]]$
    lädt den Inhalt des $R[i]$-ten Registes in das j-te Register.
  - $R[R[i]] := R[j]$
    lädt den Inhalt des j-ten Registers in das $R[i]$-te Register

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
  - $R[j] := R[i]$
  - $R[j] := 4$
- **indirekte** Adressierung
  - $R[j] := R[R[i]]$
    lädt den Inhalt des $R[i]$-ten Registes in das j-te Register.
  - $R[R[i]] := R[j]$
    lädt den Inhalt des j-ten Registers in das $R[i]$-te Register

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Eingabeoperationen (input tape $\rightarrow R[i]$)
  - READ i
- Ausgabeoperationen ($R[i] \rightarrow$ output tape)
  - WRITE i
- Registertransfers
  - $R[j] := R[i]$
  - $R[j] := 4$
- **indirekte** Adressierung
  - $R[j] := R[R[i]]$
    lädt den Inhalt des $R[i]$-ten Registes in das j-te Register.
  - $R[R[i]] := R[j]$
    lädt den Inhalt des j-ten Registers in das $R[i]$-te Register

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - `jump` x
    springe zur Position x im Programm
    setze Befehlszähler auf x
    der nächste Befehl wird aus Register $R[x]$ gelesen
  - `jumpz` x $R[i]$
    springe zu x falls $R[i] = 0$
    falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - `jumpi` i
    springe zu $R[i]$ (indirekter Sprung);
- arithmetische Operationen: $+$, $-$, $\times$, $/$

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - `jump` x
    springe zur Position x im Programm
    setze Befehlszähler auf x
    der nächste Befehl wird aus Register $R[x]$ gelesen
  - `jumpz` x $R[i]$
    springe zu x falls $R[i] = 0$
    falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - `jumpi` i
    springe zu $R[i]$ (indirekter Sprung);
- arithmetische Operationen: $+, -, \times, /$

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - `jump` x
    springe zur Position x im Programm
    setze Befehlszähler auf x
    der nächste Befehl wird aus Register $R[x]$ gelesen
  - `jumpz` x $R[i]$
    springe zu x falls $R[i] = 0$
    falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - `jumpi` i
    springe zu $R[i]$ (indirekter Sprung);
- arithmetische Operationen: $+, -, \times, /$

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - `jump` x
    springe zur Position x im Programm
    setze Befehlszähler auf x
    der nächste Befehl wird aus Register $R[x]$ gelesen
  - `jumpz` x $R[i]$
    springe zu x falls $R[i] = 0$
    falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - `jumpi` i
    springe zu $R[i]$ (indirekter Sprung);
- arithmetische Operationen: $+, -, \times, /$

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - `jump` x
    springe zur Position x im Programm
    setze Befehlszähler auf x
    der nächste Befehl wird aus Register $R[x]$ gelesen
  - `jumpz` x $R[i]$
    springe zu x falls $R[i] = 0$
    falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - `jumpi` i
    springe zu $R[i]$ (indirekter Sprung);
- arithmetische Operationen: $+$, $-$, $\times$, $/$
  - $R[i] := R[j] + R[k];$
    $R[i] := -R[k];$

Random Access Machine (RAM)

Operationen

- Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - `jump` x
    springe zur Position x im Programm
    setze Befehlszähler auf x
    der nächste Befehl wird aus Register $R[x]$ gelesen
  - `jumpz` x $R[i]$
    springe zu x falls $R[i] = 0$
    falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - `jumpi` i
    springe zu $R[i]$ (indirekter Sprung);
- arithmetische Operationen: $+$, $-$, $\times$, $/$
  - $R[i]$:= $R[j]$ + $R[k]$;
    $R[i]$:= -$R[k]$;

Rechenmodell

Man nimmt normalerweise an, dass jeder Befehl eine Zeiteinheit kostet.

Komplexitätsschranken

Es gibt unterschiedliche Komplexitätsschranken:

- best-case Komplexität:

$$C_{\mathrm{bc}}(n) := \min\{C(x) \mid |x| = n\}$$

  Normalerweise einfach zu analysieren; nicht sehr hilfreich

- worst-case Komplexität:

$$C_{\mathrm{wc}}(n) := \max\{C(x) \mid |x| = n\}$$

  Standard. Machmal zu pessimistisch.

- average case Komplexität:

$$C_{\mathrm{avg}}(n) := \frac{1}{|I_n|} \sum_{|x|=n} C(x)$$

  Manchmal schwierig zu analysieren.

Komplexitätsschranken

Es gibt unterschiedliche Komplexitätsschranken:

- best-case Komplexität:

$$C_{\mathrm{bc}}(n) := \min\{C(x) \mid |x| = n\}$$

  Normalerweise einfach zu analysieren; nicht sehr hilfreich

- worst-case Komplexität:

$$C_{\mathrm{wc}}(n) := \max\{C(x) \mid |x| = n\}$$

  Standard. Machmal zu pessimistisch.

- average case Komplexität:

$$C_{\mathrm{avg}}(n) := \frac{1}{|I_n|} \sum_{|x|=n} C(x)$$

  Manchmal schwierig zu analysieren.

Komplexitätsschranken

Es gibt unterschiedliche Komplexitätsschranken:

- best-case Komplexität:

$$C_{\mathrm{bc}}(n) := \min\{C(x) \mid |x| = n\}$$

  Normalerweise einfach zu analysieren; nicht sehr hilfreich

- worst-case Komplexität:

$$C_{\mathrm{wc}}(n) := \max\{C(x) \mid |x| = n\}$$

  Standard. Machmal zu pessimistisch.

- average case Komplexität:

$$C_{\mathrm{avg}}(n) := \frac{1}{|I_n|} \sum_{|x|=n} C(x)$$

  Manchmal schwierig zu analysieren.

Komplexitätsschranken

Es gibt unterschiedliche Komplexitätsschranken:

- best-case Komplexität:

$$C_{\mathrm{bc}}(n) := \min\{C(x) \mid |x| = n\}$$

  Normalerweise einfach zu analysieren; nicht sehr hilfreich

- worst-case Komplexität:

$$C_{\mathrm{wc}}(n) := \max\{C(x) \mid |x| = n\}$$

  Standard. Machmal zu pessimistisch.

- average case Komplexität:

$$C_{\mathrm{avg}}(n) := \frac{1}{|I_n|} \sum_{|x|=n} C(x)$$

  Manchmal schwierig zu analysieren.