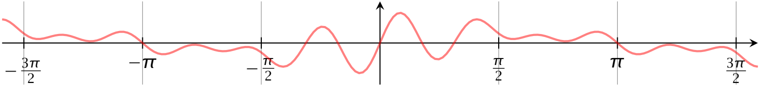
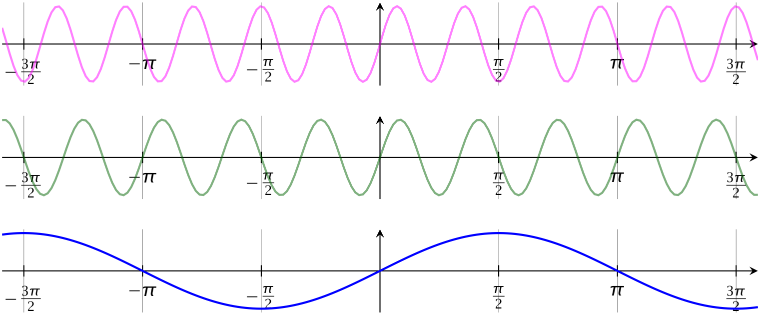
Fourieranalyse

Eingabe: Signal (periodisch)



Ausgabe: Zerlegung in Teilfrequenzen



Fourieranalyse

Im folgenden bezeichnet j die imaginäre Einheit.

Eingabe

- $x(t)$, periodisches Signal
- $x(t)$ ist Überlagerung von endlich vielen skalierten Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen $\omega_s \geq 0$

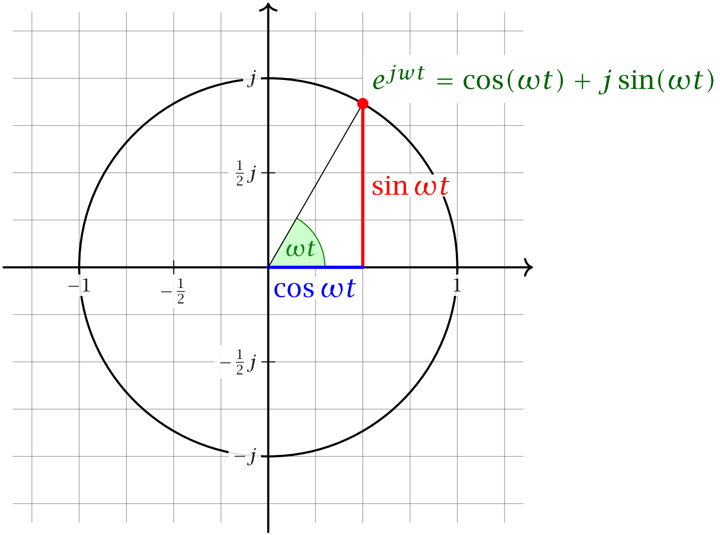
Ausgabe

- schreibe $x(t)$ als

$$x(t) = \sum_i \hat{x}[\omega_i] \cdot e^{j\omega_i t}$$

- Beachte: für jede Frequenz ω_s, die in $x(t)$ vorkommt gibt es in der obigen Formel zwei „Frequenzen“, $\omega_{i_1} = \omega_s$ und $\omega_{i_2} = -\omega_s$

Euler's Formula



Euler's Formula

Es gilt

$$e^{jwt} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Damit auch

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

D.h. wenn mein Signal aus Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen besteht, kann ich es in die geforderte Form bringen.

Warum sollte ich das tun?

Komplexe Exponentialfunktionen sind Eigenfunktionen von linear zeitinvarianten Systemen.

Vektoren

Dieses Verfahren ist natürlich nur möglich wenn die Matrix M eine Basis von Eigenvektoren besitzt, so dass man jeden Vektor in die gewünschte Form bringen kann. Dies gilt nicht für all Matrizen.

Wenn wir Vektoren haben ($x_{\text{in}} \in \mathbb{R}^n$ und $x_{\text{out}} \in \mathbb{R}^n$) ist ein lineares System einfach eine Matrixmultiplikation mit einer $n \times n$ Matrix M.

x_{in}

Lineares System $\mathcal{L}$
($x_{\text{out}} = \mathcal{L}\{x_{\text{in}}\} = Mx_{\text{in}}$)

x_{out}

- linear: $\mathcal{L}\{\alpha x_{\text{in}}\} = \alpha\mathcal{L}\{x_{\text{in}}\}$; $\mathcal{L}\{x_{\text{in}} + y_{\text{in}}\} = \mathcal{L}\{x_{\text{in}}\} + \mathcal{L}\{y_{\text{in}}\}$
- zerlege x_{in} in Eigenvektoren, d.h., schreibe $x_{\text{in}} = \sum_i \alpha_i v_i$, wobei v_i Eigenvektoren von M sind.
- dann gilt:

$$x_{\text{out}} = \mathcal{L}\left\{\sum_i \alpha_i v_i\right\} = \sum_i \alpha_i \mathcal{L}\{v_i\} = \sum_i \alpha_i \lambda_i v_i$$

wobei λ_i Eigenwert zum Eigenvektor v_i.

Vektoren

Dieses Verfahren ist natürlich nur möglich wenn die Matrix M eine Basis von Eigenvektoren besitzt, so dass man jeden Vektor in die gewünschte Form bringen kann. Dies gilt nicht für all Matrizen.

Wenn wir Vektoren haben ($x_{\text{in}} \in \mathbb{R}^n$ und $x_{\text{out}} \in \mathbb{R}^n$) ist ein lineares System einfach eine Matrixmultiplikation mit einer $n \times n$ Matrix M.

x_{in} → Lineares System $\mathcal{L}$ ($x_{\text{out}} = \mathcal{L}\{x_{\text{in}}\} = Mx_{\text{in}}$) → x_{out}

- linear: $\mathcal{L}\{\alpha x_{\text{in}}\} = \alpha\mathcal{L}\{x_{\text{in}}\}$; $\mathcal{L}\{x_{\text{in}} + y_{\text{in}}\} = \mathcal{L}\{x_{\text{in}}\} + \mathcal{L}\{y_{\text{in}}\}$
- zerlege x_{in} in Eigenvektoren, d.h., schreibe $x_{\text{in}} = \sum_i \alpha_i v_i$, wobei v_i Eigenvektoren von M sind.
- dann gilt:

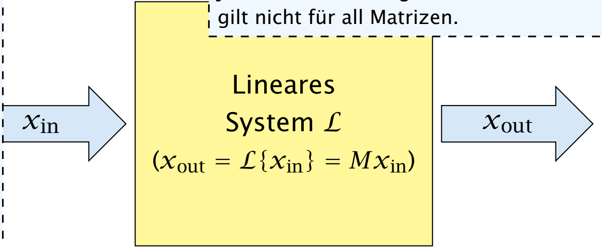
$$x_{\text{out}} = \mathcal{L}\left\{\sum_i \alpha_i v_i\right\} = \sum_i \alpha_i \mathcal{L}\{v_i\} = \sum_i \alpha_i \lambda_i v_i$$

wobei λ_i Eigenwert zum Eigenvektor v_i.

Vektoren

Wenn wir Vektoren haben ($x_{\text{in}} \in \mathbb{R}^n$ und $x_{\text{out}} \in \mathbb{R}^n$) ist ein lineares System einfach eine Matrixmultiplikation mit einer $n \times n$ Matrix M.

Dieses Verfahren ist natürlich nur möglich wenn die Matrix M eine Basis von Eigenvektoren besitzt, so dass man jeden Vektor in die gewünschte Form bringen kann. Dies gilt nicht für all Matrizen.



- linear: $\mathcal{L}\{\alpha x_{\text{in}}\} = \alpha\mathcal{L}\{x_{\text{in}}\}$; $\mathcal{L}\{x_{\text{in}} + y_{\text{in}}\} = \mathcal{L}\{x_{\text{in}}\} + \mathcal{L}\{y_{\text{in}}\}$
- zerlege x_{in} in Eigenvektoren, d.h., schreibe $x_{\text{in}} = \sum_i \alpha_i v_i$, wobei v_i Eigenvektoren von M sind.
- dann gilt:

$$x_{\text{out}} = \mathcal{L}\left\{\sum_i \alpha_i v_i\right\} = \sum_i \alpha_i \mathcal{L}\{v_i\} = \sum_i \alpha_i \lambda_i v_i$$

wobei λ_i Eigenwert zum Eigenvektor v_i.

Periodische Funktionen

$f(t)$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert λ falls $\mathcal{L}\{f(t)\} = \lambda f(t)$.

- zerlege $x_{\text{in}}(t)$ in Eigenfunktionen, d.h., schreibe $x_{\text{in}}(t) = \sum_i \alpha_i f_i(t)$, wobei f_i Eigenfunktionen von $\mathcal{L}$ sind.
- dann gilt:

$$x_{\text{out}}(t) = \mathcal{L}\left\{\sum_i \alpha_i f_i(t)\right\} = \sum_i \alpha_i \mathcal{L}\{f_i(t)\} = \sum_i \alpha_i \lambda_i f_i(t)$$

wobei λ_i Eigenwert zur Eigenfunktion $f_i(t)$ ist.

Das ist natürlich nur möglich, wenn wir die Funktion $x_{\text{in}}(t)$ als Summe von Eigenfunktionen von $\mathcal{L}$ ausdrücken können.

Periodische Funktionen

$f(t)$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert λ falls $\mathcal{L}\{f(t)\} = \lambda f(t)$.

- zerlege $x_{\text{in}}(t)$ in Eigenfunktionen, d.h., schreibe $x_{\text{in}}(t) = \sum_i \alpha_i f_i(t)$, wobei f_i Eigenfunktionen von $\mathcal{L}$ sind.
- dann gilt:

$$x_{\text{out}}(t) = \mathcal{L}\left\{\sum_i \alpha_i f_i(t)\right\} = \sum_i \alpha_i \mathcal{L}\{f_i(t)\} = \sum_i \alpha_i \lambda_i f_i(t)$$

wobei λ_i Eigenwert zur Eigenfunktion $f_i(t)$ ist.

Das ist natürlich nur möglich, wenn wir die Funktion $x_{\text{in}}(t)$ als Summe von Eigenfunktionen von $\mathcal{L}$ ausdrücken können.

Periodische Funktionen

Das heißt wenn wir periodische Signale haben benötigen wir nur eine Teilmenge der Eigenfunktionen. Insbesondere ist der Exponent rein imaginär.

Theorem

Komplexe Exponentialfunktionen ($f(t) = e^{st}$) sind Eigenfunktionen von linear zeitinvarianten Systemen.

Theorem

Jede periodische Funktion $x(t)$ mit Periode T (d.h., $x(t+T) = x(t)$ für alle t) läßt sich als

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i e^{j\frac{2\pi i}{T}t}$$

schreiben. Im folgenden $w := 2\pi/T$ und $f_i(t) = e^{j\omega i t}$.

Die periodischen Signale müssen hinreichend gutartig sein. Stetig und differenzierbar reicht z.B. aus.

Periodische Funktionen

Das heißt wenn wir periodische Signale haben benötigen wir nur eine Teilmenge der Eigenfunktionen. Insbesondere ist der Exponent rein imaginär.

Theorem

Komplexe Exponentialfunktionen ($f(t) = e^{st}$) sind Eigenfunktionen von linear zeitinvarianten Systemen.

Theorem

Jede periodische Funktion $x(t)$ mit Periode T (d.h., $x(t+T) = x(t)$ für alle t) läßt sich als

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i e^{j\frac{2\pi i}{T}t}$$

schreiben. Im folgenden $w := 2\pi/T$ und $f_i(t) = e^{j\omega i t}$.

Die periodischen Signale müssen hinreichend gutartig sein. Stetig und differenzierbar reicht z.B. aus.

Bestimmung der α_i — Vektoren

Wie schreibe ich einen Vektor x als $\sum_i \alpha_i v_i$?

Bestimme eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren, $v_1, \dots, v_n$.

- Vektoren sind auf 1 normiert: $\|v_i\| = \langle v_i, v_i \rangle = 1$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt ist.
- Vektoren sind orthogonal, d.h. für $i \neq j$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

dann gilt $\alpha_i = \langle v_i, x \rangle$, da

$$\langle v_i, x \rangle = \langle v_i, \textstyle\sum_j \alpha_j v_j \rangle = \textstyle\sum_j \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i$$

Das Standardskalarprodukt für einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist $\langle x, y \rangle = \sum_i \overline{x}_i y_i$.

Bestimmung der α_i — Vektoren

Wie schreibe ich einen Vektor x als $\sum_i \alpha_i v_i$?

Bestimme eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren, $v_1, \dots, v_n$.

- Vektoren sind auf 1 normiert: $\|v_i\| = \langle v_i, v_i \rangle = 1$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt ist.
- Vektoren sind orthogonal, d.h. für $i \neq j$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

dann gilt $\alpha_i = \langle v_i, x \rangle$, da

$$\langle v_i, x \rangle = \langle v_i, \sum_j \alpha_j v_j \rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i$$

Das Standardskalarprodukt für einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist $\langle x, y \rangle = \sum_i \bar{x}_i y_i$.

Bestimmung der α_i — Vektoren

Wie schreibe ich einen Vektor x als $\sum_i \alpha_i v_i$?

Bestimme eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren, $v_1, \dots, v_n$.

- Vektoren sind auf 1 normiert: $\|v_i\| = \langle v_i, v_i \rangle = 1$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt ist.
- Vektoren sind orthogonal, d.h. für $i \neq j$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

dann gilt $\alpha_i = \langle v_i, x \rangle$, da

$$\langle v_i, x \rangle = \langle v_i, \textstyle\sum_j \alpha_j v_j \rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i$$

Das Standardskalarprodukt für einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist $\langle x, y \rangle = \sum_i \overline{x}_i y_i$.

Bestimmung der α_i — Funktionen

Wie schreibe ich ein Signal $x(t)$ als $\sum_i \alpha_i f_i(t)$?

Definiere ein Skalarprodukt, so dass $f_i(t)$'s orthonormal sind.

Auf der Menge der T-periodischen Funktionen definiert

$$\langle a(t), b(t) \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{a(t)} b(t) \mathrm{d}t$$

ein Skalarprodukt.

Bestimmung der α_i — Funktionen

Wie schreibe ich ein Signal $x(t)$ als $\sum_i \alpha_i f_i(t)$?

Definiere ein Skalarprodukt, so dass $f_i(t)$'s orthonormal sind.

Auf der Menge der T-periodischen Funktionen definiert

$$\langle a(t), b(t)\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T \overline{a(t)}b(t)\mathrm{d}t$$

ein Skalarprodukt.

Bestimmung der α_i — Funktionen

Wie schreibe ich ein Signal $x(t)$ als $\sum_i \alpha_i f_i(t)$?

Definiere ein Skalarprodukt, so dass $f_i(t)$'s orthonormal sind.

Auf der Menge der T-periodischen Funktionen definiert

$$\langle a(t), b(t) \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{a(t)} b(t) \mathrm{d}t$$

ein Skalarprodukt.

Bestimmung der α_i — Funktionen

Skalarprodukt

1. $\langle x(t), x(t) \rangle \geq 0$
2. $\langle x(t), x(t) \rangle = 0 \iff x(t) = 0$
3. $\langle x(t), y(t) \rangle = \overline{\langle y(t), x(t) \rangle}$
4. $\langle x(t), \alpha y(t) \rangle = \alpha \langle x(t), y(t) \rangle$
   $\langle x(t), y(t) + z(t) \rangle = \langle x(t), y(t) \rangle + \langle x(t), z(t) \rangle$

1., 3., und 4. folgend direkt aus Integraleigenschaften. Für 2. muß man den Funktionenraum geeignet einschränken.

Bestimmung der α_i — Funktionen

$$\langle f_i(t), f_\ell(t) \rangle$$

Bestimmung der α_i — Funktionen

$$\langle f_i(t), f_\ell(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{e^{j\omega i t}}\, e^{j\omega \ell t}\,\mathrm{d}t$$

Bestimmung der α_i — Funktionen

$$
\begin{aligned}
\langle f_i(t), f_\ell(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{e^{j\omega i t}} e^{j\omega \ell t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\omega(\ell - i)t} \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Bestimmung der α_i — Funktionen

$$\begin{aligned}\langle f_i(t), f_\ell(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{e^{j\omega i t}} e^{j\omega \ell t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{j\omega(\ell-i)t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$i = \ell$:

$$= \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = 1$$

Bestimmung der α_i — Funktionen

$$\begin{aligned}\langle f_i(t), f_\ell(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{e^{j\omega i t}} e^{j\omega \ell t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{j\omega(\ell-i)t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\boldsymbol{i = \ell}$**:**

$$= \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = 1$$

$\boldsymbol{i \neq \ell}$**:** $(\beta := j\omega(\ell - i) \neq 0)$

Bestimmung der α_i — Funktionen

$$\begin{aligned}\langle f_i(t), f_\ell(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{e^{j\omega i t}} e^{j\omega \ell t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{j\omega(\ell-i)t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\boldsymbol{i = \ell}$**:**

$$= \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = 1$$

$\boldsymbol{i \neq \ell}$**:** $(\beta := j\omega(\ell - i) \neq 0)$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\beta t}$$

Bestimmung der α_i — Funktionen

$$\begin{aligned}\langle f_i(t), f_\ell(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{e^{j\omega i t}} e^{j\omega \ell t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{j\omega(\ell - i)t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\boldsymbol{i = \ell}$**:**

$$= \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = 1$$

$\boldsymbol{i \neq \ell}$**:** $(\beta := j\omega(\ell - i) \neq 0)$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\beta t} = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\beta}e^{\beta t}\right]_0^T$$

Bestimmung der α_i — Funktionen

$$\begin{aligned}\langle f_i(t), f_\ell(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{e^{j\omega i t}} e^{j\omega \ell t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{j\omega(\ell - i)t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

***i* = *ℓ*:**

$$= \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = 1$$

***i* ≠ *ℓ*:** $(\beta := j\omega(\ell - i) \neq 0)$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\beta t} = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\beta}e^{\beta t}\right]_0^T = \frac{1}{T\beta} - \frac{1}{T\beta} = 0$$

Bestimmung der α_i — Funktionen

$$\begin{aligned}\langle f_i(t), f_\ell(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{e^{j\omega i t}} e^{j\omega \ell t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{j\omega(\ell - i)t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\boldsymbol{i = \ell}$**:**

$$= \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = 1$$

$\boldsymbol{i \neq \ell}$**:** $(\beta := j\omega(\ell - i) \neq 0)$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\beta t} = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\beta}e^{\beta t}\right]_0^T = \frac{1}{T\beta} - \frac{1}{T\beta} = 0$$

da $e^{\beta T} = e^{j2\pi(\ell - i)} = 1$.

Bestimmung der α_i — Funktionen

Damit gilt $\alpha_i = \langle f_i(t), x(t) \rangle$, d.h.

$$\alpha_i = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\omega i t} \mathrm{d}t$$

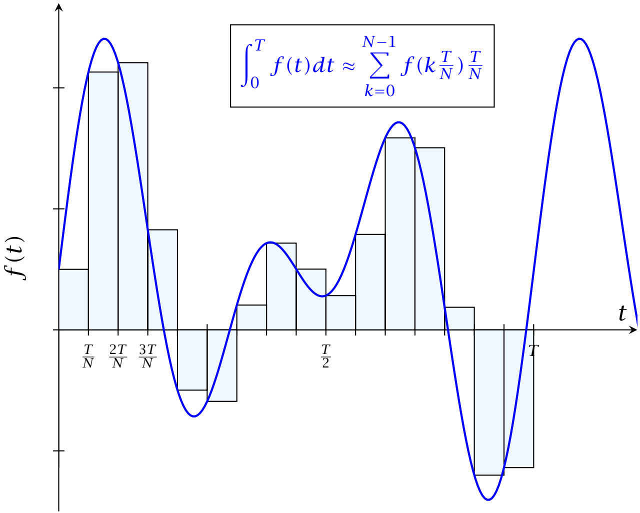
da

$$\langle f_i(t), x(t) \rangle = \langle f_i(t), \sum_\ell \alpha_\ell f_\ell(t) \rangle = \sum_\ell \alpha_\ell \langle f_i(t), f_\ell(t) \rangle = \alpha_i$$

leider muß man hier integrieren...

Wenn mein Signal $x(t)$ aus nur wenigen Frequenzen besteht, dann ist der eigentliche „Informationsinhalt“ des Signals sehr gering. Hier muß ich aber trotzdem das Signal über dem gesamten Intervall $[0, T]$ auswerten um α_i zu bestimmen. Das ist sehr ineffizient.

Approximation des Integrals



Bestimmung der α_i

Angenommen mein Signal ist

$$x(t) = \sum_{\ell} \alpha_\ell e^{j\omega\ell t}$$

aber ich sehe nur das Gesamtsignal.

Bestimmung der α_i

Angenommen mein Signal ist

$$x(t) = \sum_{\ell} \alpha_{\ell} e^{j\omega\ell t}$$

aber ich sehe nur das Gesamtsignal.

Bilde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} x(\tfrac{T}{N}k) e^{-j\omega i \frac{T}{N}k}\,\frac{T}{N} &= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell} \alpha_{\ell} e^{j\omega\ell\frac{T}{N}k} e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\,\frac{T}{N} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell} \alpha_{\ell} e^{j\frac{2\pi}{T}\ell\frac{T}{N}k} e^{-j\frac{2\pi}{T}i\frac{T}{N}k}\,\frac{T}{N} \\
&= \sum_{i} \alpha_i \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} \stackrel{?}{=} \alpha_i
\end{aligned}$$

Bestimmung der α_i

Angenommen mein Signal ist

$$x(t) = \sum_{\ell} \alpha_\ell e^{j\omega\ell t}$$

aber ich sehe nur das Gesamtsignal.

Bilde

$$\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} x(\tfrac{T}{N}k)e^{-j\omega i \frac{T}{N}k}\frac{T}{N} = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell}\alpha_\ell e^{j\omega\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\frac{T}{N}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell}\alpha_\ell e^{j\frac{2\pi}{T}\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\frac{2\pi}{T}i\frac{T}{N}k}\frac{T}{N}$$

$$= \sum_{i}\alpha_i\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} \stackrel{?}{=} \alpha_i$$

Bestimmung der α_i

Angenommen mein Signal ist

$$x(t) = \sum_{\ell} \alpha_\ell e^{j\omega\ell t}$$

aber ich sehe nur das Gesamtsignal.

Bilde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} x(\tfrac{T}{N}k)e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\,\frac{T}{N} &= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell}\alpha_\ell e^{j\omega\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\,\frac{T}{N} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell}\alpha_\ell e^{j\frac{2\pi}{T}\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\frac{2\pi}{T}i\frac{T}{N}k}\,\frac{T}{N} \\
&= \sum_{i}\alpha_i\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} \stackrel{?}{=} \alpha_i
\end{aligned}$$

Bestimmung der α_i

Angenommen mein Signal ist

$$x(t) = \sum_{\ell} \alpha_\ell e^{j\omega\ell t}$$

aber ich sehe nur das Gesamtsignal.

Bilde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} x(\tfrac{T}{N}k)e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\,\frac{T}{N} &= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell}\alpha_\ell e^{j\omega\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\,\frac{T}{N} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell}\alpha_\ell e^{j\frac{2\pi}{T}\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\frac{2\pi}{T}i\frac{T}{N}k}\,\frac{T}{N} \\
&= \sum_{i}\alpha_i\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} \stackrel{?}{=} \alpha_i
\end{aligned}$$

Bestimmung der α_i

Angenommen mein Signal ist

$$x(t) = \sum_{\ell} \alpha_\ell e^{j\omega\ell t}$$

aber ich sehe nur das Gesamtsignal.

Bilde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} x(\tfrac{T}{N}k)e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\frac{T}{N} &= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell}\alpha_\ell e^{j\omega\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\frac{T}{N} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell}\alpha_\ell e^{j\frac{2\pi}{T}\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\frac{2\pi}{T}i\frac{T}{N}k}\frac{T}{N} \\
&= \sum_{i}\alpha_i\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} \stackrel{?}{=} \alpha_i
\end{aligned}$$

Wie finde ich den Koeffizienten für Frequenz ω_ℓ?

Für $i \neq \ell \mod N$ gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^k \qquad \text{mit } q = e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)} \neq 1$$

$$= \frac{1}{N}\frac{q^N-1}{q-1} = 0 \qquad \text{da } q^N = 1$$

Für $i = \ell \mod N$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1$$

Sei $\frac{2\pi}{N}s$ größte Frequenz die vorkommt. Wir wählen $N \geq 2s+1$.

Dann bekommt man α_i exakt!!!

Wie finde ich den Koeffizienten für Frequenz ω_ℓ?

Für $i \neq \ell \mod N$ gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^k \qquad \text{mit } q = e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)} \neq 1$$

$$= \frac{1}{N}\frac{q^N-1}{q-1} = 0 \qquad \text{da } q^N = 1$$

Für $i = \ell \mod N$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1$$

Sei $\frac{2\pi}{N}s$ größte Frequenz die vorkommt. Wir wählen $N \geq 2s+1$.
Dann bekommt man α_i exakt!!!

Wie finde ich den Koeffizienten für Frequenz ω_ℓ?

Für $i \neq \ell \mod N$ gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^k \qquad \text{mit } q = e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)} \neq 1$$

$$= \frac{1}{N}\frac{q^N-1}{q-1} = 0 \qquad \text{da } q^N = 1$$

Für $i = \ell \mod N$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1$$

Sei $\frac{2\pi}{N}s$ größte Frequenz die vorkommt. Wir wählen $N \geq 2s+1$.
Dann bekommt man α_i exakt!!!

Wie finde ich den Koeffizienten für Frequenz ω_ℓ?

Für $i \neq \ell \mod N$ gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^k \qquad \text{mit } q = e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)} \neq 1$$

$$= \frac{1}{N}\frac{q^N-1}{q-1} = 0 \qquad \text{da } q^N = 1$$

Für $i = \ell \mod N$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1$$

Sei $\frac{2\pi}{N}s$ größte Frequenz die vorkommt. Wir wählen $N \geq 2s+1$.
Dann bekommt man α_i exakt!!!

Wie finde ich den Koeffizienten für Frequenz ω_ℓ?

Für $i \neq \ell \mod N$ gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^k \qquad \text{mit } q = e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)} \neq 1$$

$$= \frac{1}{N}\frac{q^N-1}{q-1} = 0 \qquad \text{da } q^N = 1$$

Für $i = \ell \mod N$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1$$

Sei $\frac{2\pi}{N}s$ größte Frequenz die vorkommt. Wir wählen $N \geq 2s+1$.
Dann bekommt man α_i exakt!!!

Diskrete Fouriertransformation

Gegeben $x_0, \dots, x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{-s, \dots, s\}$$

Anstatt negativer Werte für ℓ können wir für negatives ℓ, ℓ durch $\ell' := N + \ell$ ersetzen.

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Gegeben $x_0, \dots, x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\hat{x}_\ell = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{0, \dots, N-1\}$$

Wenn wir $N > 2s + 1$ gewählt haben berechnen wir eventuell mehr Werte als wir brauchen. Dies ist aber kein Problem.

Diskrete Fouriertransformation

Gegeben $x_0, \ldots, x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{-s, \ldots, s\}$$

Anstatt negativer Werte für ℓ können wir für negatives ℓ, ℓ durch $\ell' := N + \ell$ ersetzen.

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Gegeben $x_0, \ldots, x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\hat{x}_\ell = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{0, \ldots, N-1\}$$

Wenn wir $N > 2s + 1$ gewählt haben berechnen wir eventuell mehr Werte als wir brauchen. Dies ist aber kein Problem.

Diskrete Fouriertransformation

Gegeben $x_0, \dots, x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{-s, \dots, s\}$$

Anstatt negativer Werte für ℓ können wir für negatives ℓ, ℓ durch $\ell' := N + \ell$ ersetzen.

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Gegeben $x_0, \dots, x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\hat{x}_\ell = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{0, \dots, N-1\}$$

Wenn wir $N > 2s + 1$ gewählt haben berechnen wir eventuell mehr Werte als wir brauchen. Dies ist aber kein Problem.

N-te Einheitswurzeln

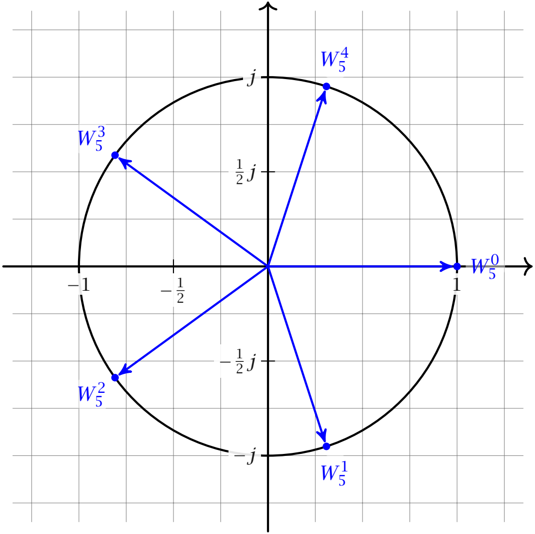
Definition: Einheitswurzel
$q \in \mathbb{C}$ ist N-te Einheitswurzel, gdw., $q^N = 1$.

Definition: primitive Einheitswurzel
Einheitswurzel $q \in \mathbb{C}$ ist primitiv falls sich jede Einheitswurzel q' als $q' = q^i$ mit $i \in \mathbb{N}$ schreiben läßt.

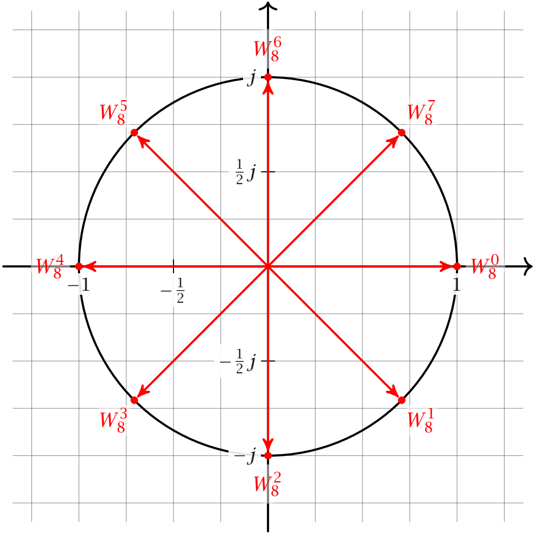
Beispiel:

$W_N := e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ist primitive N-te Einheitswurzel.

N-te Einheitswurzeln



N-te Einheitswurzeln



Diskrete Fouriertransformation

Diskrete Fouriertransformation (DFT)
Gegeben $x_0, \dots, x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\hat{x}_\ell = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{0, \dots, N-1\}$$

Das heißt wir möchten im wesentlichen das durch Koeffizienten $x_0, \dots, x_{N-1}$ definierte Polynom an den Stellen W_N^ℓ auswerten ($\ell \in \{0, \dots, N-1\}$).

Ein Polynom vom Grad $N-1$ hat die Form $\sum_{i=0}^{N-1} c_i X^i$. Hier sind die Koeffizienten $c_i = x_i$ und die Unbestimmte (Variable) ist X. Wir möchten dieses Polynom nun an den Stellen $W_N^0, \dots, W_N^{N-1}$ auswerten. Danach müssen wir noch all Ergebnisse durch N dividieren.

Polynomauswertung

Gegeben Koeffizienten $c_0, \dots, c_{N-1}$, die ein Polynom

$$P[X] = \sum_{i=0}^{N-1} c_i X^i$$

definieren. Wir können $P[z]$ in Zeit $\mathcal{O}(N)$ berechnen.

Horner-Schema:

$$P[X] = c_0 + X(c_1 + X(c_2 + X(\cdots X(c_{N-2} + X(c_{N-1}))\cdots)))$$

```
evaluateHorner(C,z) // C is array of coefficients
    res = C[N-1];
    for i = N-2 to 0
        res *= z;
        res += C[i];
    return res;
```

Diskrete Fouriertransformation

Damit können wir eine DFT in Zeit $\mathcal{O}(N^2)$ berechnen.

Geht das schneller?

JA: Polynomauswertung an N-ten Einheitswurzeln kann sehr effizient gemacht werden.

Im folgenden beschreiben wir ein Verfahren, dass ein gegebenes Polynom P vom Grad $N-1$ (gegeben durch Koeffizienten $c_0, \dots, c_{N-1}$) an den N-ten Einheitswurzeln, d.h. an den Stellen W_N^ℓ, $\ell \in \{0, \dots, N-1\}$, auswertet, wobei W_N eine beliebige primitive N-te Einheitswurzel ist. Das heißt im folgenden gehen wir nicht davon aus, dass $W_N = e^{-j2\pi/N}$ ist. Um eine DFT zu erhalten muß man das folgende Verfahren zur Auswertung von Polynomen mit $W_N = e^{-j2\pi/N}$ anwenden und danach mit $1/N$ multiplizieren.

N-te Einheitswurzeln

Halbierungslemma

Sei $N \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt W_N^2 ist $N/2$-te primitive Einheitswurzel.

Beweis

- $(W_N^2)^{N/2} = W_N^N = 1$, d.h. W_N^2 ist $N/2$-te Einheitswurzel.
- Wir wollen zeigen, dass W_N^2 primitive $N/2$-te Einheitswurzel ist. Dafür zeigen wir, dass $(W_N^2)^\ell$ für $\ell \in \{0, \ldots, N/2-1\}$ insgesamt $N/2$ verschiedene Werte ergibt.

  Angenommen es existiert $\ell_1, \ell_2 \in \{0, \ldots, N/2-1\}$ mit $(W_N^2)^{\ell_1} = (W_N^2)^{\ell_2}$ aber $\ell_1 \neq \ell_2$ (o.B.d.A. $\ell_1 < \ell_2$).

  Dann folgt $W_N^{2(\ell_2 - \ell_1)} = 1$. Da $0 < 2(\ell_2 - \ell_1) \le N-1$ kann W_N damit keine primitive N-te Einheitswurzel sein.

N-te Einheitswurzeln

Halbierungslemma

Sei $N \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt W_N^2 ist $N/2$-te primitive Einheitswurzel.

Beweis

- $(W_N^2)^{N/2} = W_N^N = 1$, d.h. W_N^2 ist $N/2$-te Einheitswurzel.
- Wir wollen zeigen, dass W_N^2 primitive $N/2$-te Einheitswurzel ist. Dafür zeigen wir, dass $(W_N^2)^\ell$ für $\ell \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$ insgesamt $N/2$ verschiedene Werte ergibt.

  Angenommen es existiert $\ell_1, \ell_2 \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$ mit $(W_N^2)^{\ell_1} = (W_N^2)^{\ell_2}$ aber $\ell_1 \neq \ell_2$ (o.B.d.A. $\ell_1 < \ell_2$).

  Dann folgt $W_N^{2(\ell_2 - \ell_1)} = 1$. Da $0 < 2(\ell_2 - \ell_1) \leq N - 1$ kann W_N damit keine primitive N-te Einheitswurzel sein (⚡).

N-te Einheitswurzeln

Halbierungslemma

Sei $N \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt W_N^2 ist $N/2$-te primitive Einheitswurzel.

Beweis

- $(W_N^2)^{N/2} = W_N^N = 1$, d.h. W_N^2 ist $N/2$-te Einheitswurzel.
- Wir wollen zeigen, dass W_N^2 primitive $N/2$-te Einheitswurzel ist. Dafür zeigen wir, dass $(W_N^2)^\ell$ für $\ell \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$ insgesamt $N/2$ verschiedene Werte ergibt.

  Angenommen es existiert $\ell_1, \ell_2 \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$ mit $(W_N^2)^{\ell_1} = (W_N^2)^{\ell_2}$ aber $\ell_1 \neq \ell_2$ (o.B.d.A. $\ell_1 < \ell_2$).

  Dann folgt $W_N^{2(\ell_2 - \ell_1)} = 1$. Da $0 < 2(\ell_2 - \ell_1) \leq N - 1$ kann W_N damit keine primitive N-te Einheitswurzel sein (↯).

N-te Einheitswurzeln

Halbierungslemma

Sei $N \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt W_N^2 ist $N/2$-te primitive Einheitswurzel.

Beweis

- $(W_N^2)^{N/2} = W_N^N = 1$, d.h. W_N^2 ist $N/2$-te Einheitswurzel.
- Wir wollen zeigen, dass W_N^2 primitive $N/2$-te Einheitswurzel ist. Dafür zeigen wir, dass $(W_N^2)^\ell$ für $\ell \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$ insgesamt $N/2$ verschiedene Werte ergibt.

  Angenommen es existiert $\ell_1, \ell_2 \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$ mit $(W_N^2)^{\ell_1} = (W_N^2)^{\ell_2}$ aber $\ell_1 \neq \ell_2$ (o.B.d.A. $\ell_1 < \ell_2$).

  Dann folgt $W_N^{2(\ell_2 - \ell_1)} = 1$. Da $0 < 2(\ell_2 - \ell_1) \leq N - 1$ kann W_N damit keine primitive N-te Einheitswurzel sein ($\lightning$).

N-te Einheitswurzeln

Halbierungslemma

Sei $N \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt W_N^2 ist $N/2$-te primitive Einheitswurzel.

Beweis

- $(W_N^2)^{N/2} = W_N^N = 1$, d.h. W_N^2 ist $N/2$-te Einheitswurzel.
- Wir wollen zeigen, dass W_N^2 primitive $N/2$-te Einheitswurzel ist. Dafür zeigen wir, dass $(W_N^2)^\ell$ für $\ell \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$ insgesamt $N/2$ verschiedene Werte ergibt.

  Angenommen es existiert $\ell_1, \ell_2 \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$ mit $(W_N^2)^{\ell_1} = (W_N^2)^{\ell_2}$ aber $\ell_1 \neq \ell_2$ (o.B.d.A. $\ell_1 < \ell_2$).

  Dann folgt $W_N^{2(\ell_2 - \ell_1)} = 1$. Da $0 < 2(\ell_2 - \ell_1) \leq N - 1$ kann W_N damit keine primitive N-te Einheitswurzel sein (↯).

Fast Fourier Transform (FFT)

Aufgabe:

Werte Polynom P an Stellen $W_N^0, \dots, W_N^{N-1}$ aus.

Annahme: N ist 2er-Potenz

definiere:

$$P_{\text{odd}} = c_1 + c_3X + c_5X^2 + \ldots + c_{N-1}X^{\frac{N-2}{2}}$$

$$P_{\text{even}} = c_0 + c_2X + c_4X^2 + \ldots + c_{N-2}X^{\frac{N-2}{2}}$$

dann gilt:

$$P[a] = P_{\text{even}}[a^2] + aP_{\text{odd}}[a^2]$$

Wir müssen z.B. P_{odd} für alle a^2 mit $a \in \{W_N^0, \dots, W_N^{N-1}\}$ berechnen, d.h. für Menge $\{(W_N^0)^2, \dots, (W_N^{N-1})^2\}$, das ist aber die Menge $\{W_{N/2}^0, \dots, W_{N/2}^{N/2-1}\}$ (Halbierungslemma).

Fast Fourier Transform (FFT)

Aufgabe:

Werte Polynom P an Stellen $W_N^0, \ldots, W_N^{N-1}$ aus.

Annahme: N ist 2er-Potenz

definiere:

$$P_{\text{odd}} = c_1 + c_3X + c_5X^2 + \ldots + c_{N-1}X^{\frac{N-2}{2}}$$

$$P_{\text{even}} = c_0 + c_2X + c_4X^2 + \ldots + c_{N-2}X^{\frac{N-2}{2}}$$

dann gilt:

$$P[a] = P_{\text{even}}[a^2] + aP_{\text{odd}}[a^2]$$

Wir müssen z.B. P_{odd} für alle a^2 mit $a \in \{W_N^0, \ldots, W_N^{N-1}\}$ berechnen, d.h. für Menge $\{(W_N^0)^2, \ldots, (W_N^{N-1})^2\}$, das ist aber die Menge $\{W_{N/2}^0, \ldots, W_{N/2}^{N/2-1}\}$ (Halbierungslemma).

Fast Fourier Transform (FFT)

Aufgabe:

Werte Polynom P an Stellen $W_N^0, \ldots, W_N^{N-1}$ aus.

Annahme: N ist 2er-Potenz

definiere:

$$P_{\text{odd}} = c_1 + c_3 X + c_5 X^2 + \ldots + c_{N-1} X^{\frac{N-2}{2}}$$

$$P_{\text{even}} = c_0 + c_2 X + c_4 X^2 + \ldots + c_{N-2} X^{\frac{N-2}{2}}$$

dann gilt:

$$P[a] = P_{\text{even}}[a^2] + a P_{\text{odd}}[a^2]$$

Wir müssen z.B. P_{odd} für alle a^2 mit $a \in \{W_N^0, \ldots, W_N^{N-1}\}$ berechnen, d.h. für Menge $\{(W_N^0)^2, \ldots, (W_N^{N-1})^2\}$, das ist aber die Menge $\{W_{N/2}^0, \ldots, W_{N/2}^{N/2-1}\}$ (Halbierungslemma).

Fast Fourier Transform (FFT)

Aufgabe:

Werte Polynom P an Stellen $W_N^0, \dots, W_N^{N-1}$ aus.

Annahme: N ist 2er-Potenz

definiere:

$$P_{\text{odd}} = c_1 + c_3 X + c_5 X^2 + \dots + c_{N-1} X^{\frac{N-2}{2}}$$

$$P_{\text{even}} = c_0 + c_2 X + c_4 X^2 + \dots + c_{N-2} X^{\frac{N-2}{2}}$$

dann gilt:

$$P[a] = P_{\text{even}}[a^2] + a P_{\text{odd}}[a^2]$$

Wir müssen z.B. P_{odd} für alle a^2 mit $a \in \{W_N^0, \dots, W_N^{N-1}\}$ berechnen, d.h. für Menge $\{(W_N^0)^2, \dots, (W_N^{N-1})^2\}$, das ist aber die Menge $\{W_{N/2}^0, \dots, W_{N/2}^{N/2-1}\}$ (Halbierungslemma).

Implementierung

```
Input:  Polynom P of degree N-1, by coefficient array C
Output: R[ℓ] contains P[W_N^ℓ]

FFT(C,N,W_N) // C is array of coefficients
    if (N == 1) return C;
    C_odd  = [C[1],C[3],...,C[N-1]];
    C_even = [C[0],C[2],...,C[N-2]];
    R_odd  = FFT(C_odd ,N/2,W_N^2);
    R_even = FFT(C_even,N/2,W_N^2);
    W = 1;  // W = W_N^0
    for ℓ = 0 to N/2-1
        R[ℓ]       = R_even[ℓ] + W * R_odd [ℓ];
        R[ℓ + N/2] = R_even[ℓ] - W * R_odd [ℓ];
        W *= W_N;  // W = W_N^ℓ
    return R;
```

Um die DFT zu erhalten müssen wir $W_N = e^{-j2\pi/N}$ setzen, und das Ergebnis durch N dividieren.

Korrektheit

Für $N = 1$ besteht das Polynom nur aus Koeffizient c_0, d.h., bei der Auswertung ist nichts zu tun.

Nach Zeile 5/6 gilt

$$\mathsf{R}_{\text{odd}}[\ell] = P_{\text{odd}}[W_{N/2}^{\ell}] = P_{\text{odd}}[W_N^{2\ell}] \quad \text{für } \ell = 0, \dots, N/2 - 1$$

$$\mathsf{R}_{\text{even}}[\ell] = P_{\text{even}}[W_{N/2}^{\ell}] = P_{\text{even}}[W_N^{2\ell}] \quad \text{für } \ell = 0, \dots, N/2 - 1$$

Nach Zeile 9 gilt

$$\mathsf{R}[\ell] = P_{\text{even}}[W_N^{2\ell}] + W_N^{\ell} \cdot P_{\text{odd}}[W_N^{2\ell}] = P[W_N^{\ell}]$$

Nach Zeile 10 gilt

$$\begin{aligned} \mathsf{R}[\ell + N/2] &= P_{\text{even}}[W_N^{2\ell}] - W_N^{\ell} \cdot P_{\text{odd}}[W_N^{2\ell}] \\ &= P_{\text{even}}[(W_N^{\ell+N/2})^2] + W_N^{\ell+N/2} \cdot P_{\text{odd}}[(W_N^{\ell+N/2})^2] \\ &= P[W_N^{\ell+N/2}] \end{aligned}$$

Beachte, dass $W_N^{N/2} = -1$.

Fast Fourier Transform (FFT)

Laufzeit:

- Rekurrenzgleichung: $T(n) = 2T(n/2) + \mathcal{O}(n)$
- Mastertheorem ergibt: $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$

Diskrete Fouriertransformation

Hier vewenden wir wieder $W_N = e^{-j2\pi/N}$, d.h., W_N ist keine beliebige Einheitswurzel.

Eine DFT berechnet das folgende Matrix-Vektor Produkt.

$$\frac{1}{N}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-2)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}}_{V_N} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{N-1} \end{pmatrix}$$

V_N heißt Vandermonde matrix. Die Inverse Matrix V_N^{-1} ist gegeben durch

$$V_N^{-1} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-2)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Diskrete Fouriertransformation

Beweis:

Das Element in Zeile i und Spalte j in $V_N \cdot V_N^{-1}$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(W_N^i)^k \cdot (W_N^{-j})^k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(W_N^{i-j})^k = \begin{cases} 1 & i = j \mod N \\ 0 & i \neq j \mod N \end{cases}$$

Polynominterpolation

Angenommen wir haben ein Polynom an Stellen $W_N^0, \dots, W_N^{N-1}$ ausgewertet. Mit Hilfe von V_N^{-1} können wir die Koeffizienten des Polynoms herausfinden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-2)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}}_{N \cdot V_N^{-1}} \begin{pmatrix} P[W_N^0] \\ P[W_N^1] \\ \vdots \\ P[W_N^{N-1}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

Um das Matrix-Vektor-Produkt auszurechen müssen wir den FFT-Algorithmus mit $-W_N$ benutzen; wobei $P[W_N^0], \dots, P[W_N^{N-1}]$ die Koeffizienten des auszuwertenden Polynoms sind.

Polynome

Man kann Polynome als Funktionen auffassen; z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \mapsto P[x]$. Allgemeiner ist es aber Polynome als algebraische Objekte aufzufassen. Auf diesen Objekten gibt es Operationen wie z.B. Auswertung, Multiplikation, Addition, oder Division.

Ein formaler Ausdruck der Form

$$P[X] = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots + c_{n-1}X^{n-1}$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$ und $c_{n-1} \neq 0$ heißt Polynom vom Grad $n-1$. Die c_i heißen Koeffizienten des Polynoms.

- $\mathrm{grad}(P)$ bezeichnet den Grad des Polynoms;

Operationen auf Polynomen

Seien $A[X], B[X]$ Polynome

- Auswertung: berechne für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$A[x_0]$$

- Addition: berechne Polynom $C[X]$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$C[x] = A[x] \cdot B[x]$$

- Multiplikation: berechne Polynom $C[X]$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$C[x] = A[x] + B[x]$$

Repräsentation von Polynomen

Koeffizientdarstellung

Wir repräsentieren das Polynom durch die Koeffizienten $c_0, \dots, c_{n-1}$.

Repräsentation von Polynomen

Theorem:
Ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist durch Funktionswerte an n paarweise verschiedenen Stellen eindeutig definiert.

Stützstellendarstellung
Wir wählen n paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \dots, x_{n-1}$.

Wir repräsentieren das Polynom P durch die Funktionswerte $P[x_0], \dots, P[x_{n-1}]$.

Die Stützstellendarstellung ist nicht eindeutig. Jede Menge von verschiedenen Punkten $x_0, \dots, x_{n-1}$ kann verwendet werden.

Auswertung von Polynomen

Koeffizientendarstellung

Mit dem Hornerschema können wir $P[z]$ in Zeit $\mathcal{O}(n)$ berechnen.

Stützstellendarstellung bzgl. $x_0, \ldots, x_{n-1}$

nicht so einfach...

Auswertung von Polynomen

Koeffizientendarstellung

Mit dem Hornerschema können wir $P[z]$ in Zeit $\mathcal{O}(n)$ berechnen.

Stützstellendarstellung bzgl. $x_0, \ldots, x_{n-1}$

nicht so einfach...

Addition von Polynomen

Koeffizientendarstellung

Seien $a_0, \dots, a_{n-1}$ Koeffizienten von $A[X]$ und $b_0, \dots, b_{n-1}$ Koeffizienten von $B[X]$.

Koeffizienten von $C[X] = A[X] + B[X]$ sind gegeben durch $c_i = a_i + b_i$, d.h. wir benötigen n Additionen.

Stützstellendarstellung bzgl. $x_0, \dots, x_{n-1}$

Sei $A[x_i] = a_i$ und $B[x_i] = b_i$. $C[x_i] = a_i + b_i$ (direkt aus der Definition). D.h. wir benötigen n Additionen.

Addition von Polynomen

Koeffizientendarstellung

Seien $a_0, \dots, a_{n-1}$ Koeffizienten von $A[X]$ und $b_0, \dots, b_{n-1}$ Koeffizienten von $B[X]$.

Koeffizienten von $C[X] = A[X] + B[X]$ sind gegeben durch $c_i = a_i + b_i$, d.h. wir benötigen n Additionen.

Stützstellendarstellung bzgl. $\boldsymbol{x_0, \dots, x_{n-1}}$

Sei $A[x_i] = a_i$ und $B[x_i] = b_i$. $C[x_i] = a_i + b_i$ (direkt aus der Definition). D.h. wir benötigen n Additionen.

Multiplikation von Polynomen

Stützstellendarstellung bzgl. $x_0, \dots, x_{n-1}$

Sei $A[x_i] = a_i$ und $B[x_i] = b_i$. $C[x_i] = a_i \cdot b_i$ (direkt aus der Definition). D.h. wir benötigen n Multiplikationen.

Koeffizientendarstellung

Seien $a_0, \dots, a_{n-1}$ Koeffizienten von $A[X]$ und $b_0, \dots, b_{n-1}$ Koeffizienten von $B[X]$.

Koeffizienten von $C[X] = A[X] \cdot B[X]$ sind gegeben durch

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

Für Element c_i benötigt man $i + 1$ Multiplikationen und i Additionen. Insgesamt Aufwand $\mathcal{O}(n^2)$.

Multiplikation von Polynomen

Stützstellendarstellung bzgl. $x_0, \dots, x_{n-1}$
Sei $A[x_i] = a_i$ und $B[x_i] = b_i$. $C[x_i] = a_i \cdot b_i$ (direkt aus der Definition). D.h. wir benötigen n Multiplikationen.

Koeffizientendarstellung
Seien $a_0, \dots, a_{n-1}$ Koeffizienten von $A[X]$ und $b_0, \dots, b_{n-1}$ Koeffizienten von $B[X]$.

Koeffizienten von $C[X] = A[X] \cdot B[X]$ sind gegeben durch

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

Für Element c_i benötigt man $i + 1$ Multiplikationen und i Additionen. Insgesamt Aufwand $\mathcal{O}(n^2)$.

Interpolation

Transformation eines Polynoms von Stützstellendarstellung in Koeffizientendarstellung heißt Polynominterpolation.

Interpolation

Stützstellen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ beliebig. Sei $y_k = A[x_k]$.

Lagrange-Interpolationsformel:

$$A[X] = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k}(X - x_j)}{\prod_{j \neq k}(x_k - x_j)}$$

Aufwand: $\mathcal{O}(n^2)$ durch geschickte Reihenfolge der Operationen.

Es ist klar, dass die Formel ein Polynom vom Grad höchstens $n-1$ liefert. Außerdem sieht man leicht, dass $A[x_k] = y_k$ ist. Also ergibt die Formel das gesuchte Polynom.

Beobachtung

Wenn wir komplexe Einheitswurzeln als Stützstellen verwenden können wir in Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ zwischen Koeffizientendarstellung und Stützstellendarstellung wechseln!!!!!!!!!!

Wir können Polynome in Koeffizientendarstellung in Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ multiplizieren.

- berechne Stützstellendarstellung bzgl. Einheitswurzeln (Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ via FFT)
- berechne Produkt in Stützstellendarstellung: Zeit (n)
- berechne Koeffizientendarstellung aus Stützstellendarstellung (Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ via inverser FFT)