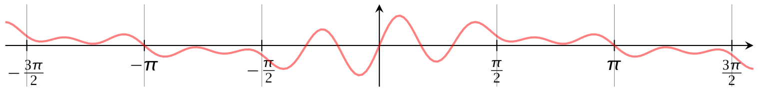
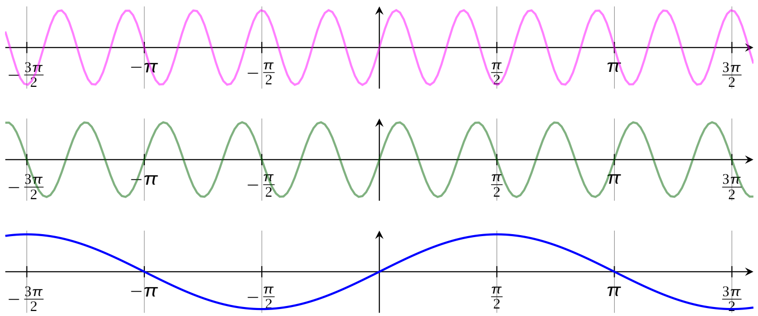
# Fourieranalyse

**Eingabe: Signal (periodisch)**




**Ausgabe: Zerlegung in Teilfrequenzen**




# Fourieranalyse

Im folgenden bezeichnet $j$ die imaginäre Einheit.

**Eingabe**

- $x(t)$, periodisches Signal
- $x(t)$ ist Überlagerung von endlich vielen skalierten Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen $\omega_s \geq 0$

**Ausgabe**

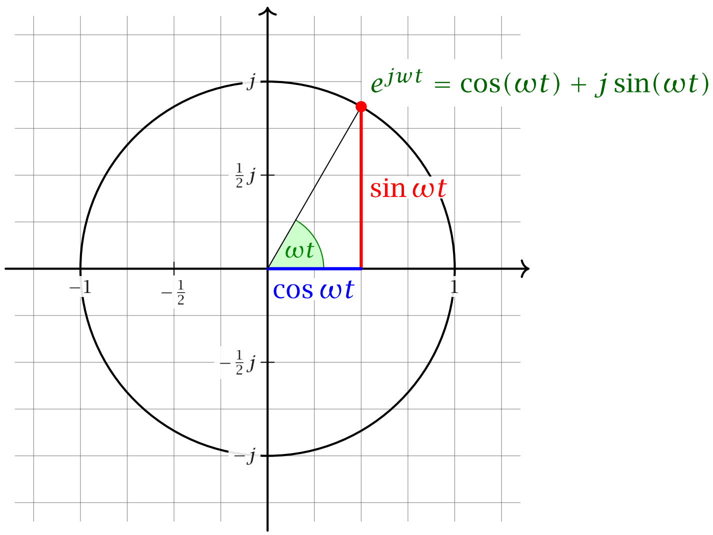
- schreibe $x(t)$ als

$$x(t) = \sum_i \hat{x}[\omega_i] \cdot e^{j\omega_i t}$$

- Beachte: für jede Frequenz $\omega_s$, die in $x(t)$ vorkommt gibt es in der obigen Formel zwei „Frequenzen“, $\omega_{i_1} = \omega_s$ und $\omega_{i_2} = -\omega_s$



# Euler's Formula




# Euler's Formula

Es gilt

$$e^{jwt} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Damit auch

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

D.h. wenn mein Signal aus Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen besteht, kann ich es in die geforderte Form bringen.

## Warum sollte ich das tun?

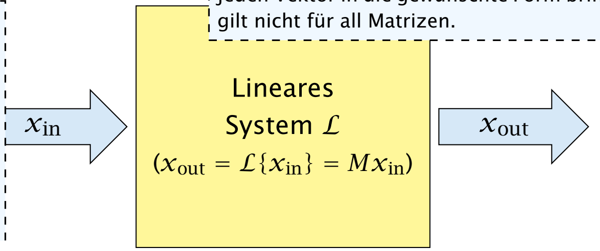
Komplexe Exponentialfunktionen sind Eigenfunktionen von linear zeitinvarianten Systemen.



## Vektoren

Dieses Verfahren ist natürlich nur möglich wenn die Matrix $M$ eine Basis von Eigenvektoren besitzt, so dass man jeden Vektor in die gewünschte Form bringen kann. Dies gilt nicht für all Matrizen.

Wenn wir Vektoren haben ($x_{\text{in}} \in \mathbb{R}^n$ und $x_{\text{out}} \in \mathbb{R}^n$) ist ein lineares System einfach eine Matrixmultiplikation mit einer $n \times n$ Matrix $M$.




- linear: $\mathcal{L}\{\alpha x_{\text{in}}\} = \alpha\mathcal{L}\{x_{\text{in}}\}$; $\mathcal{L}\{x_{\text{in}} + y_{\text{in}}\} = \mathcal{L}\{x_{\text{in}}\} + \mathcal{L}\{y_{\text{in}}\}$
- zerlege $x_{\text{in}}$ in Eigenvektoren, d.h., schreibe $x_{\text{in}} = \sum_i \alpha_i v_i$, wobei $v_i$ Eigenvektoren von $M$ sind.
- dann gilt:

$$x_{\text{out}} = \mathcal{L}\left\{\sum_i \alpha_i v_i\right\} = \sum_i \alpha_i \mathcal{L}\{v_i\} = \sum_i \alpha_i \lambda_i v_i$$

wobei $\lambda_i$ Eigenwert zum Eigenvektor $v_i$.

## Periodische Funktionen

$f(t)$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda$ falls $\mathcal{L}\{f(t)\} = \lambda f(t)$.


- zerlege $x_{\text{in}}(t)$ in Eigenfunktionen, d.h., schreibe $x_{\text{in}}(t) = \sum_i \alpha_i f_i(t)$, wobei $f_i$ Eigenfunktionen von $\mathcal{L}$ sind.
- dann gilt:

$$x_{\text{out}}(t) = \mathcal{L}\left\{\sum_i \alpha_i f_i(t)\right\} = \sum_i \alpha_i \mathcal{L}\{f_i(t)\} = \sum_i \alpha_i \lambda_i f_i(t)$$

wobei $\lambda_i$ Eigenwert zur Eigenfunktion $f_i(t)$ ist.

Das ist natürlich nur möglich, wenn wir die Funktion $x_{\text{in}}(t)$ als Summe von Eigenfunktionen von $\mathcal{L}$ ausdrücken können.

## Periodische Funktionen

Das heißt wenn wir periodische Signale haben benötigen wir nur eine Teilmenge der Eigenfunktionen. Insbesondere ist der Exponent rein imaginär.

**Theorem**
Komplexe Exponentialfunktionen ($f(t) = e^{st}$) sind Eigenfunktionen von linear zeitinvarianten Systemen.

**Theorem**
Jede periodische Funktion $x(t)$ mit Periode $T$ (d.h., $x(t+T) = x(t)$ für alle $t$) läßt sich als

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i e^{j\frac{2\pi i}{T}t}$$

schreiben. Im folgenden $w := 2\pi/T$ und $f_i(t) = e^{jwit}$.

Die periodischen Signale müssen hinreichend gutartig sein. Stetig und differenzierbar reicht z.B. aus.

## Bestimmung der $\alpha_i$ — Vektoren

Wie schreibe ich einen Vektor $x$ als $\sum_i \alpha_i v_i$?

Bestimme eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren, $v_1, \dots, v_n$.

- Vektoren sind auf 1 normiert: $\|v_i\| = \langle v_i, v_i \rangle = 1$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt ist.
- Vektoren sind orthogonal, d.h. für $i \neq j$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

dann gilt $\alpha_i = \langle v_i, x \rangle$, da

$$\langle v_i, x \rangle = \langle v_i, \textstyle\sum_j \alpha_j v_j \rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i$$

Das Standardskalarprodukt für einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist $\langle x, y \rangle = \sum_i \overline{x}_i y_i$.



## Bestimmung der $\alpha_i$ — Funktionen

Wie schreibe ich ein Signal $x(t)$ als $\sum_i \alpha_i f_i(t)$?

Definiere ein Skalarprodukt, so dass $f_i(t)$'s orthonormal sind.

Auf der Menge der $T$-periodischen Funktionen definiert

$$\langle a(t), b(t) \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{a(t)} b(t) \mathrm{d}t$$

ein Skalarprodukt.



## Bestimmung der $\alpha_i$ — Funktionen

**Skalarprodukt**

1. $\langle x(t), x(t) \rangle \geq 0$
2. $\langle x(t), x(t) \rangle = 0 \iff x(t) = 0$
3. $\langle x(t), y(t) \rangle = \overline{\langle y(t), x(t) \rangle}$
4. $\langle x(t), \alpha y(t) \rangle = \alpha \langle x(t), y(t) \rangle$
   $\langle x(t), y(t) + z(t) \rangle = \langle x(t), y(t) \rangle + \langle x(t), z(t) \rangle$

1., 3., und 4. folgend direkt aus Integraleigenschaften. Für 2. muß man den Funktionenraum geeignet einschränken.

## Bestimmung der $\alpha_i$ — Funktionen

$$\begin{aligned}\langle f_i(t), f_\ell(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{e^{j\omega i t}} e^{j\omega \ell t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\omega(\ell - i)t} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\boldsymbol{i = \ell}$:

$$= \frac{1}{T} \int_0^T 1 \mathrm{d}t = 1$$

$\boldsymbol{i \neq \ell}$: $(\beta := j\omega(\ell - i) \neq 0)$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T e^{\beta t} = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{\beta} e^{\beta t} \right]_0^T = \frac{1}{T\beta} - \frac{1}{T\beta} = 0$$

da $e^{\beta T} = e^{j2\pi(\ell - i)} = 1$.

## Bestimmung der $\alpha_i$ — Funktionen

Damit gilt $\alpha_i = \langle f_i(t), x(t)\rangle$, d.h.

$$\alpha_i = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega i t}\mathrm{d}t$$

da

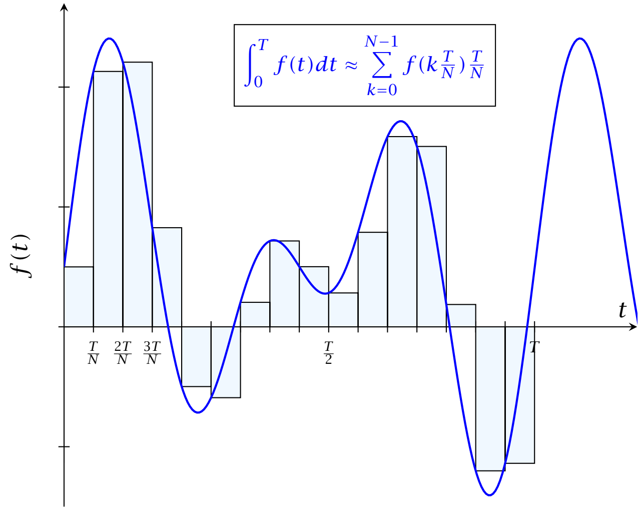
$$\langle f_i(t), x(t)\rangle = \langle f_i(t), \textstyle\sum_\ell \alpha_\ell f_\ell(t)\rangle = \sum_\ell \alpha_\ell \langle f_i(t), f_\ell(t)\rangle = \alpha_i$$

**leider muß man hier integrieren...**

Wenn mein Signal $x(t)$ aus nur wenigen Frequenzen besteht, dann ist der eigentliche „Informationsinhalt" des Signals sehr gering. Hier muß ich aber trotzdem das Signal über dem gesamten Intervall $[0,T]$ auswerten um $\alpha_i$ zu bestimmen. Das ist sehr ineffizient.



## Approximation des Integrals






## Bestimmung der $\alpha_i$

Angenommen mein Signal ist

$$x(t) = \sum_\ell \alpha_\ell e^{j\omega\ell t}$$

aber ich sehe nur das Gesamtsignal.

Bilde

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} x(\tfrac{T}{N}k)e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\frac{T}{N} &= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_\ell \alpha_\ell e^{j\omega\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\omega i\frac{T}{N}k}\frac{T}{N}\\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_\ell \alpha_\ell e^{j\frac{2\pi}{T}\ell\frac{T}{N}k}e^{-j\frac{2\pi}{T}i\frac{T}{N}k}\frac{T}{N}\\ &= \sum_i \alpha_i \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} \stackrel{?}{=} \alpha_i\end{aligned}$$



## Wie finde ich den Koeffizienten für Frequenz $\omega_\ell$?

**Für $i \neq \ell \mod N$ gilt**

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^k && \text{mit } q = e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)} \neq 1\\ &= \frac{1}{N}\frac{q^N-1}{q-1} = 0 && \text{da } q^N = 1\end{aligned}$$

**Für $i = \ell \mod N$**

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell-i)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1$$

Sei $\frac{2\pi}{N}s$ größte Frequenz die vorkommt. Wir wählen $N \geq 2s+1$.

**Dann bekommt man $\alpha_i$ exakt!!!**

## Diskrete Fouriertransformation

Gegeben $x_0,\dots,x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{-s,\dots,s\}$$

Anstatt negativer Werte für $\ell$ können wir für negatives $\ell$, $\ell$ durch $\ell' := N+\ell$ ersetzen.

**Diskrete Fouriertransformation (DFT)**
Gegeben $x_0,\dots,x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\hat{x}_\ell = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{0,\dots,N-1\}$$

Wenn wir $N > 2s+1$ gewählt haben berechnen wir eventuell mehr Werte als wir brauchen. Dies ist aber kein Problem.



## $N$-te Einheitswurzeln

**Definition:** Einheitswurzel
$q \in \mathbb{C}$ ist $N$-te Einheitswurzel, gdw., $q^N = 1$.

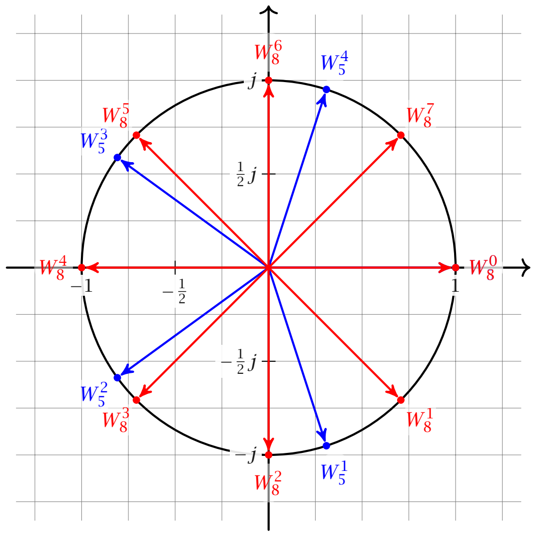
**Definition:** primitive Einheitswurzel
Einheitswurzel $q \in \mathbb{C}$ ist primitiv falls sich jede Einheitswurzel $q'$ als $q' = q^i$ mit $i \in \mathbb{N}$ schreiben läßt.

**Beispiel:**

$W_N := e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ist primitive $N$-te Einheitswurzel.



## $N$-te Einheitswurzeln






## Diskrete Fouriertransformation

**Diskrete Fouriertransformation (DFT)**
Gegeben $x_0,\dots,x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\hat{x}_\ell = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{\ell k} \quad \text{für } \ell \in \{0,\dots,N-1\}$$

Das heißt wir möchten im wesentlichen das durch Koeffizienten $x_0,\dots,x_{N-1}$ definierte Polynom an den Stellen $W_N^\ell$ auswerten ($\ell \in \{0,\dots,N-1\}$).

Ein Polynom vom Grad $N-1$ hat die Form $\sum_{i=0}^{N-1} c_i X^i$. Hier sind die Koeffizienten $c_i = x_i$ und die Unbestimmte (Variable) ist $X$. Wir möchten dieses Polynom nun an den Stellen $W_N^0, \dots, W_N^{N-1}$ auswerten. Danach müssen wir noch all Ergebnisse durch $N$ dividieren.

## Polynomauswertung

Gegeben Koeffizienten $c_0, \ldots, c_{N-1}$, die ein Polynom

$$P[X] = \sum_{i=0}^{N-1} c_i X^i$$

definieren. Wir können $P[z]$ in Zeit $\mathcal{O}(N)$ berechnen.

**Horner-Schema:**

$$P[X] = c_0 + X(c_1 + X(c_2 + X(\cdots X(c_{N-2} + X(c_{N-1}))\cdots)))$$

```
evaluateHorner(C,z) // C is array of coefficients
    res = C[N-1];
    for i = N-2 to 0
        res *= z;
        res += C[i];
    return res;
```

## Diskrete Fouriertransformation

Damit können wir eine DFT in Zeit $\mathcal{O}(N^2)$ berechnen.

Geht das schneller?

JA: Polynomauswertung an $N$-ten Einheitswurzeln kann sehr effizient gemacht werden.

Im folgenden beschreiben wir ein Verfahren, dass ein gegebenes Polynom $P$ vom Grad $N-1$ (gegeben durch Koeffizienten $c_0, \ldots, c_{N-1}$) an den $N$-ten Einheitswurzeln, d.h. an den Stellen $W_N^\ell$, $\ell \in \{0, \ldots, N-1\}$, auswertet, wobei $W_N$ eine beliebige primitive $N$-te Einheitswurzel ist. Das heißt im folgenden gehen wir nicht davon aus, dass $W_N = e^{-j2\pi/N}$ ist. Um eine DFT zu erhalten muß man das folgende Verfahren zur Auswertung von Polynomen mit $W_N = e^{-j2\pi/N}$ anwenden und danach mit $1/N$ multiplizieren.



## $N$-te Einheitswurzeln

**Halbierungslemma**
Sei $N \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt $W_N^2$ ist $N/2$-te primitive Einheitswurzel.

**Beweis**

- $(W_N^2)^{N/2} = W_N^N = 1$, d.h. $W_N^2$ ist $N/2$-te Einheitswurzel.
- Wir wollen zeigen, dass $W_N^2$ primitive $N/2$-te Einheitswurzel ist. Dafür zeigen wir, dass $(W_N^2)^\ell$ für $\ell \in \{0, \ldots, N/2-1\}$ insgesamt $N/2$ verschiedene Werte ergibt.

  Angenommen es existiert $\ell_1, \ell_2 \in \{0, \ldots, N/2-1\}$ mit $(W_N^2)^{\ell_1} = (W_N^2)^{\ell_2}$ aber $\ell_1 \neq \ell_2$ (o.B.d.A. $\ell_1 < \ell_2$).

  Dann folgt $W_N^{2(\ell_2-\ell_1)} = 1$. Da $0 < 2(\ell_2 - \ell_1) \leq N-1$ kann $W_N$ damit keine primitive $N$-te Einheitswurzel sein ($\lightning$).



## Fast Fourier Transform (FFT)

**Aufgabe:**
Werte Polynom $P$ an Stellen $W_N^0, \ldots, W_N^{N-1}$ aus.
**Annahme: $N$ ist 2er-Potenz**

definiere:

$$P_{\text{odd}} = c_1 + c_3 X + c_5 X^2 + \ldots + c_{N-1} X^{\frac{N-2}{2}}$$
$$P_{\text{even}} = c_0 + c_2 X + c_4 X^2 + \ldots + c_{N-2} X^{\frac{N-2}{2}}$$

dann gilt:

$$P[a] = P_{\text{even}}[a^2] + a P_{\text{odd}}[a^2]$$

Wir müssen z.B. $P_{\text{odd}}$ für alle $a^2$ mit $a \in \{W_N^0, \ldots, W_N^{N-1}\}$ berechnen, d.h. für Menge $\{(W_N^0)^2, \ldots, (W_N^{N-1})^2\}$, das ist aber die Menge $\{W_{N/2}^0, \ldots, W_{N/2}^{N/2-1}\}$ (Halbierungslemma).

## Implementierung

```
1  Input:  Polynom P of degree N-1, by coefficient array C
2  Output: R[ℓ] contains P[W_N^ℓ]
3
4  FFT(C,N,W_N) // C is array of coefficients
5      if (N == 1) return C;
6      C_odd  = [C[1],C[3],...,C[N-1]];
7      C_even = [C[0],C[2],...,C[N-2]];
8      R_odd  = FFT(C_odd ,N/2,W_N^2);
9      R_even = FFT(C_even,N/2,W_N^2);
10     W = 1; // W = W_N^0
11     for ℓ = 0 to N/2-1
12         R[ℓ]       = R_even[ℓ] + W * R_odd [ℓ];
13         R[ℓ + N/2] = R_even[ℓ] - W * R_odd [ℓ];
14         W *= W_N; // W = W_N^ℓ
15     return R;
```

Um die DFT zu erhalten müssen wir $W_N = e^{-j2\pi/N}$ setzen, und das Ergebnis durch $N$ dividieren.

## Korrektheit

Für $N = 1$ besteht das Polynom nur aus Koeffizient $c_0$, d.h., bei der Auswertung ist nichts zu tun.

Nach Zeile 5/6 gilt

$$\begin{aligned} R_{\text{odd}}[\ell] &= P_{\text{odd}}[W_{N/2}^{\ell}] = P_{\text{odd}}[W_N^{2\ell}] && \text{für } \ell = 0,\dots,N/2-1 \\ R_{\text{even}}[\ell] &= P_{\text{even}}[W_{N/2}^{\ell}] = P_{\text{even}}[W_N^{2\ell}] && \text{für } \ell = 0,\dots,N/2-1 \end{aligned}$$

Nach Zeile 9 gilt

$$R[\ell] = P_{\text{even}}[W_N^{2\ell}] + W_N^{\ell} \cdot P_{\text{odd}}[W_N^{2\ell}] = P[W_N^{\ell}]$$

Nach Zeile 10 gilt

$$\begin{aligned} R[\ell + N/2] &= P_{\text{even}}[W_N^{2\ell}] - W_N^{\ell} \cdot P_{\text{odd}}[W_N^{2\ell}] \\ &= P_{\text{even}}[(W_N^{\ell+N/2})^2] + W_N^{\ell+N/2} \cdot P_{\text{odd}}[(W_N^{\ell+N/2})^2] \\ &= P[W_N^{\ell+N/2}] \end{aligned}$$

Beachte, dass $W_N^{N/2} = -1$.

## Fast Fourier Transform (FFT)

Laufzeit:

- Rekurrenzgleichung: $T(n) = 2T(n/2) + \mathcal{O}(n)$
- Mastertheorem ergibt: $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$



## Diskrete Fouriertransformation

Hier vewenden wir wieder $W_N = e^{-j2\pi/N}$, d.h., $W_N$ ist keine beliebige Einheitswurzel.

Eine DFT berechnet das folgende Matrix-Vektor Produkt.

$$\frac{1}{N}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-2)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}}_{V_N} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{N-1} \end{pmatrix}$$

$V_N$ heißt Vandermonde matrix. Die Inverse Matrix $V_N^{-1}$ ist gegeben durch

$$V_N^{-1} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-2)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

## Diskrete Fouriertransformation

**Beweis:**
Das Element in Zeile $i$ und Spalte $j$ in $V_N \cdot V_N^{-1}$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(W_N^i)^k \cdot (W_N^{-j})^k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(W_N^{i-j})^k = \begin{cases} 1 & i = j \mod N \\ 0 & i \neq j \mod N \end{cases}$$



## Polynominterpolation

Angenommen wir haben ein Polynom an Stellen $W_N^0, \dots, W_N^{N-1}$ ausgewertet. Mit Hilfe von $V_N^{-1}$ können wir die Koeffizienten des Polynoms herausfinden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-2)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}}_{N \cdot V_N^{-1}} \begin{pmatrix} P[W_N^0] \\ P[W_N^1] \\ \vdots \\ P[W_N^{N-1}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

Um das Matrix-Vektor-Produkt auszurechen müssen wir den FFT-Algorithmus mit $-W_N$ benutzen; wobei $P[W_N^0], \dots, P[W_N^{N-1}]$ die Koeffizienten des auszuwertenden Polynoms sind.



## Polynome

Man kann Polynome als Funktionen auffassen; z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \mapsto P[x]$. Allgemeiner ist es aber Polynome als algebraische Objekte aufzufassen. Auf diesen Objekten gibt es Operationen wie z.B. Auswertung, Multiplikation, Addition, oder Division.

Ein formaler Ausdruck der Form

$$P[X] = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots + c_{n-1}X^{n-1}$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$ und $c_{n-1} \neq 0$ heißt Polynom vom Grad $n-1$. Die $c_i$ heißen Koeffizienten des Polynoms.

- $\mathrm{grad}(P)$ bezeichnet den Grad des Polynoms;



## Operationen auf Polynomen

Seien $A[X], B[X]$ Polynome

- Auswertung: berechne für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$A[x_0]$$

- Addition: berechne Polynom $C[X]$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$C[x] = A[x] \cdot B[x]$$

- Multiplikation: berechne Polynom $C[X]$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$C[x] = A[x] + B[x]$$

## Repräsentation von Polynomen

**Koeffizientdarstellung**
Wir repräsentieren das Polynom durch die Koeffizienten $c_0, \dots, c_{n-1}$.



## Repräsentation von Polynomen

**Theorem:**
Ein Polynom vom Grad $n-1$ ist durch Funktionswerte an $n$ paarweise verschiedenen Stellen eindeutig definiert.

**Stützstellendarstellung**
Wir wählen $n$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \dots, x_{n-1}$.

Wir repräsentieren das Polynom $P$ durch die Funktionswerte $P[x_0], \dots, P[x_{n-1}]$.

Die Stützstellendarstellung ist nicht eindeutig. Jede Menge von verschiedenen Punkten $x_0, \dots, x_{n-1}$ kann verwendet werden.



## Auswertung von Polynomen

**Koeffizientendarstellung**
Mit dem Hornerschema können wir $P[z]$ in Zeit $\mathcal{O}(n)$ berechnen.

**Stützstellendarstellung bzgl. $x_0, \dots, x_{n-1}$**
nicht so einfach...



## Addition von Polynomen

**Koeffizientendarstellung**
Seien $a_0, \dots, a_{n-1}$ Koeffizienten von $A[X]$ und $b_0, \dots, b_{n-1}$ Koeffizienten von $B[X]$.

Koeffizienten von $C[X] = A[X] + B[X]$ sind gegeben durch $c_i = a_i + b_i$, d.h. wir benötigen $n$ Additionen.

**Stützstellendarstellung bzgl. $x_0, \dots, x_{n-1}$**
Sei $A[x_i] = a_i$ und $B[x_i] = b_i$. $C[x_i] = a_i + b_i$ (direkt aus der Definition). D.h. wir benötigen $n$ Additionen.

## Multiplikation von Polynomen

**Stützstellendarstellung bzgl. $x_0, \dots, x_{n-1}$**
Sei $A[x_i] = a_i$ und $B[x_i] = b_i$. $C[x_i] = a_i \cdot b_i$ (direkt aus der Definition). D.h. wir benötigen $n$ Multiplikationen.

**Koeffizientendarstellung**
Seien $a_0, \dots, a_{n-1}$ Koeffizienten von $A[X]$ und $b_0, \dots, b_{n-1}$ Koeffizienten von $B[X]$.

Koeffizienten von $C[X] = A[X] \cdot B[X]$ sind gegeben durch

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

Für Element $c_i$ benötigt man $i+1$ Multiplikationen und $i$ Additionen. Insgesamt Aufwand $\mathcal{O}(n^2)$.



## Interpolation

Transformation eines Polynoms von Stützstellendarstellung in Koeffizientendarstellung heißt Polynominterpolation.



## Interpolation

Stützstellen $x_0, \dots, x_{n-1}$ beliebig. Sei $y_k = A[x_k]$.

**Lagrange-Interpolationsformel:**

$$A[X] = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k}(X - x_j)}{\prod_{j \neq k}(x_k - x_j)}$$

**Aufwand:** $\mathcal{O}(n^2)$ durch geschickte Reihenfolge der Operationen.

Es ist klar, dass die Formel ein Polynom vom Grad höchstens $n-1$ liefert. Außerdem sieht man leicht, dass $A[x_k] = y_k$ ist. Also ergibt die Formel das gesuchte Polynom.



**Beobachtung**
Wenn wir komplexe Einheitswurzeln als Stützstellen verwenden können wir in Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ zwischen Koeffizientendarstellung und Stützstellendarstellung wechseln!!!!!!!!!!

Wir können Polynome in Koeffizientendarstellung in Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ multiplizieren.

- berechne Stützstellendarstellung bzgl. Einheitswurzeln (Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ via FFT)
- berechne Produkt in Stützstellendarstellung: Zeit $(n)$
- berechne Koeffizientendarstellung aus Stützstellendarstellung (Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ via inverser FFT)