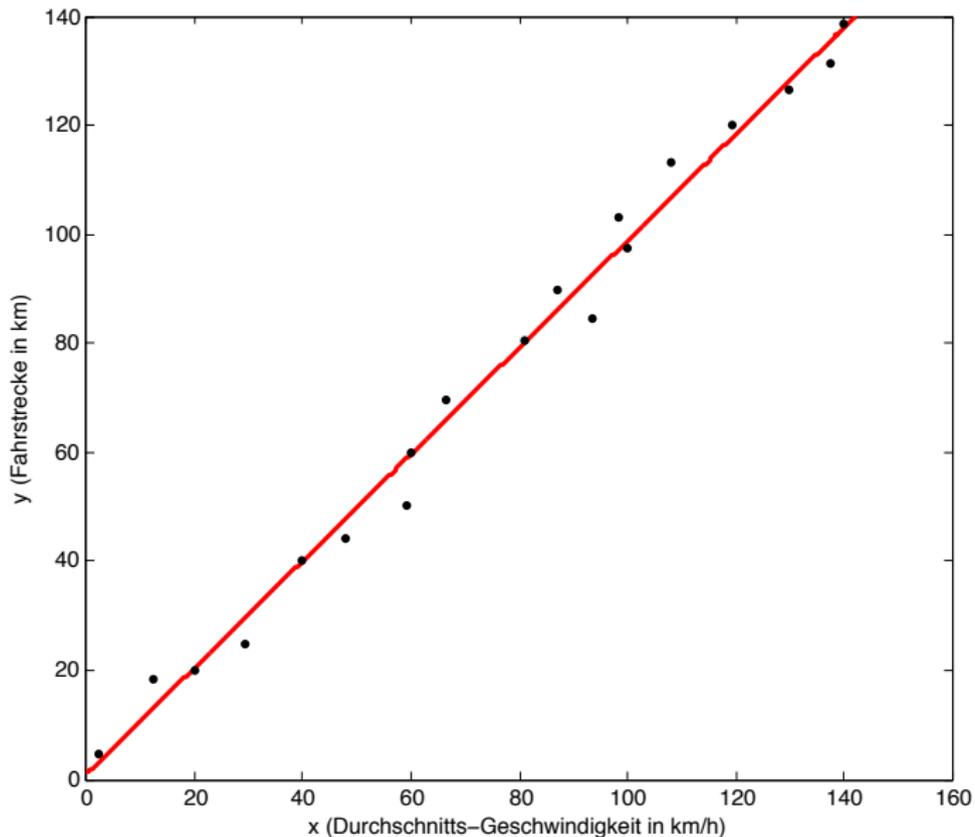
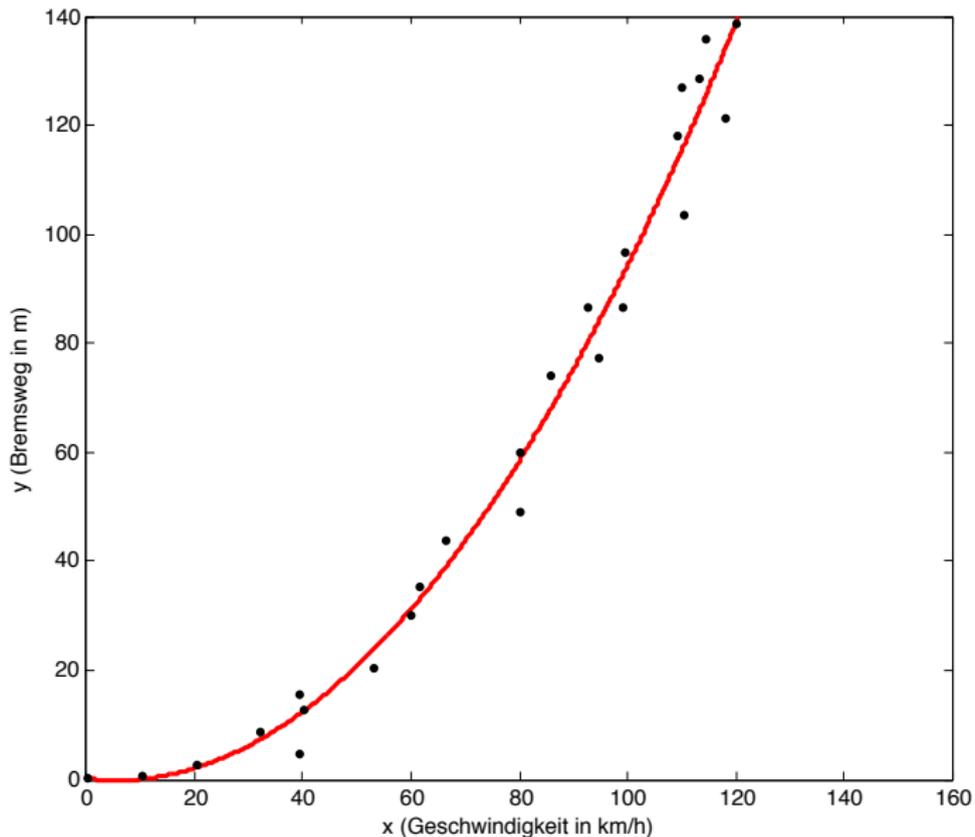


Beispiel-Problem: Geschwindigkeit vs. Fahrstrecke



Beispiel-Problem: Geschwindigkeit vs. Bremsweg



Problemstellung Least Squares

- ▶ **Gegeben:** Datenreihe mit m Datenpunkten

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$$

mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, m$

- ▶ **Erwartung:** y_j enthalten Messfehler ($j = 1, \dots, m$)
- ▶ **Gesucht:** Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so dass **Approximationsfehler**

$$\eta_j = F(x_j) - y_j$$

für alle $j = 1, \dots, m$ möglichst gering

- ▶ **Annahme:** F lässt sich darstellen als Summe von Basisfunktionen f_i ,

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$$

Problemstellung Least Squares

- ▶ **Gegeben:** Datenreihe mit m Datenpunkten

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$$

mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, m$

- ▶ **Erwartung:** y_j enthalten Messfehler ($j = 1, \dots, m$)
- ▶ **Gesucht:** Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so dass **Approximationsfehler**

$$\eta_j = F(x_j) - y_j$$

für alle $j = 1, \dots, m$ möglichst gering

- ▶ **Annahme:** F lässt sich darstellen als Summe von Basisfunktionen f_i ,

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$$

Wahl der Basisfunktionen

Wahl der Basisfunktionen f_i für F :

- ▶ typische Wahl: $f_i(x) = x^{i-1}$, dann

$$F(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_nx^{n-1}$$

(Polynom in x vom Grad $n - 1$)

- ▶ auch oft mit $n = 2$, dann

$$F(x) = c_1 + c_2x$$

(Gerade) auch genannt **lineare Regression**

- ▶ im Fall von Tomographie: Pixel- oder Voxel-Basisfunktionen

Matrix-Notation

- ▶ für die verschiedenen Datenpunkte $x_j, j = 1, \dots, m$, kann F geschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix} F(x_1) \\ \vdots \\ F(x_m) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_m) & \cdots & f_n(x_m) \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{=:c}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$.

- ▶ untersucht wird dann der **Approximationsfehler** η

$$\eta = Ac - y$$

mit $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Daten mit Meßfehler

ist $m = n$ und A invertierbar, so kann direkt

$$Ac - y = 0$$

gelöst werden.

Problem:

- ▶ selbst wenn A invertierbar ist, y enthält Meßfehler
- ▶ Lösung F ist dann meist **nicht** die **gewünschte** Lösung
- ▶ passt sich zu sehr an "Ausreißer" an

besser: mehr Datenpunkte, $m \gg n$

Minimierung des Approximationsfehlers

- ▶ zur **Minimierung des Approximationsfehlers** kann z.B. die Norm $\|\eta\|$ betrachtet werden

$$\|\eta\| = \left(\sum_{j=1}^m \eta_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \eta_j^2}$$

- ▶ zur Vereinfachung betrachtet man üblicherweise

$$\|\eta\|^2 = \|Ac - \mathcal{Y}\|^2 = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji}c_i - \mathcal{Y}_j \right)^2$$

- ▶ daher der Name: **Methode der kleinsten Quadrate** oder **Least squares**

Least-squares Lösung

Least-squares Lösung

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$. Eine Lösung $c \in \mathbb{R}^n$ des Minimierungs-Problems

$$\min_c \|Ac - y\| \quad \text{or} \quad \min_c \|Ac - y\|^2$$

heißt **Least-squares Lösung**.

Anwendungs-Beispiele:

- ▶ Tracking von Objekten mit Kameras
- ▶ Kalibrierung von Kameras, Robotern, etc.
- ▶ Iterative Rekonstruktion für Tomographie

Normalengleichung

- ▶ Berechnung der **Least-squares Lösung** mit Standard-Technik
“Ableitung gleich null setzen”
- ▶ hier: partielle Ableitungen für $k = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial \|\eta\|^2}{\partial c_k} = \sum_{j=1}^m 2 \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} c_i - y_j \right) a_{jk} = 0$$

- ▶ daraus folgt

$$\nabla \|\eta\|^2 = A^T (Ac - \mathbf{y}) = 0$$

- ▶ umgeformt ergibt sich

$$A^T Ac = A^T \mathbf{y}$$

auch genannt die **Normalengleichung**.

Normalengleichung

Normalengleichung

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$. $c \in \mathbb{R}^n$ ist eine Least-squares Lösung von $\min_c \|Ac - y\|$ genau dann, wenn die Normalengleichung gilt:

$$A^T A c = A^T y$$

Insbesondere ist die Normalengleichung lösbar, falls $\text{rank}(A) = n$.

Normalengleichung

Normalengleichung

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$. $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ist eine Least-squares Lösung von $\min_{\mathbf{c}} \|A\mathbf{c} - \mathbf{y}\|$ genau dann, wenn die Normalengleichung gilt:

$$A^T A \mathbf{c} = A^T \mathbf{y}$$

Insbesondere ist die Normalengleichung lösbar, falls $\text{rank}(A) = n$.

- ▶ Die Matrix $A^T A$ ist immer **symmetrisch**.
- ▶ Falls $\text{rank}(A) = n$ ist $A^T A$ auch **positiv definit** und damit invertierbar
- ▶ Die Lösung der Normalengleichung ist dann

$$\mathbf{c} = ((A^T A)^{-1} A^T) \mathbf{y}.$$

Pseudoinverse

Pseudoinverse

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $\text{rank}(A) = n$. Die Matrix

$$A^+ := (A^T A)^{-1} A^T$$

heißt **Pseudoinverse** von A (auch **Moore-Penrose Inverse** genannt).

- ▶ Die Pseudoinverse verallgemeinert das Konzept der Inversen für nicht-quadratische Matrizen.
- ▶ Ist A invertierbar, dann gilt $A^+ = A^{-1}$.

Pseudoinverse

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ löse

$$A^T A c = A^T y$$

Umbenennung der Variablen:

$$M x = b$$

- ▶ $x = c$
- ▶ $M = A^T A$; Berechnung in Zeit $\mathcal{O}(n^2 m)$; (trivialer Algorithmus)
- ▶ $b = A^T y$; Berechnung in Zeit $\mathcal{O}(m n)$; (trivialer Algorithmus)

Lösen von linearen Systemen

Inverse Matrix

Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratische Matrix. Falls ein $M' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit

$$MM' = M'M = I_n$$

(wobei I_n die $n \times n$ Einheitsmatrix ist), dann heißt M **invertierbar** und wir nennen $M' =: M^{-1}$ das **Inverse** von M .

- ▶ Ist $Mx = b$ lineares System mit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, dann ist

$$x = M^{-1}b$$

die **Lösung** des linearen Systems. Diese Lösung ist **eindeutig**.

Invertierbarkeit von Matrizen

Problem 1: wann ist eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar?

- ▶ $Mx = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$

Invertierbarkeit von Matrizen

Problem 1: wann ist eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar?

- ▶ $Mx = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$

Problem 2: falls M invertierbar, wie findet man das Inverse M^{-1} ?

- ▶ Berechnung mit Gauss-Jordan Elimination
- ▶ Umweg über Zerlegungen von M (z.B. LU-Zerlegung)
- ▶ **generell:** Berechnung der Inversen meist numerisch nicht stabil

Günstige Matrix-Formen

- ▶ M **diagonal**: Lösung kann abgelesen werden

$$\begin{pmatrix} M_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{nn} \end{pmatrix} x = b$$

- ▶ M **obere Dreiecksmatrix**: Rückwärtssubstitution

$$\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & M_{nn} \end{pmatrix} x = b$$

- ▶ M **untere Dreiecksmatrix**: Vorwärtssubstitution

$$\begin{pmatrix} M_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} x = b$$

Rückwärtssubstitution

Lineares System in **oberer Dreiecksform**:

$$\begin{aligned}M_{11}x_1 + M_{21}x_2 + \dots + M_{1,n-1}x_{n-1} + M_{1n}x_n &= b_1 \\M_{22}x_2 + \dots + M_{2,n-1}x_{n-1} + M_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\M_{n-1,n-1}x_{n-1} + M_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\M_{n,n}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Rückwärts nacheinander nach x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 auflösen:

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n M_{ij}x_j \right) / M_{ii}$$

Aufwand: $\mathcal{O}(n^2)$ arithmetische Operationen (FLOPs)

Vorwärtssubstitution

Lineares System in **unterer Dreiecksform**:

$$M_{11}x_1 = b_1$$

$$M_{21}x_1 + M_{22}x_2 = b_2$$

$$\vdots$$

$$M_{n-1,1}x_1 + M_{n-1,2}x_2 + \dots + M_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1}$$

$$M_{n1}x_1 + M_{n2}x_2 + \dots + M_{n,n-1}x_{n-1} + M_{nn}x_n = b_n$$

Vorwärts nacheinander nach x_1, x_2, \dots, x_n auflösen:

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} M_{ij}x_j \right) / M_{ii}$$

Aufwand: $\mathcal{O}(n^2)$ FLOPs

Gauss Elimination

Gauss-Elimination: Überführung der Matrix A in **Dreiecksform** durch **elementare Zeilenumformungen**

- ▶ Komplexität: $\Theta(n^3)$

Gauss-Jordan-Elimination: Überführung der Matrix A in **Diagonalform** durch **elementare Zeilenumformungen**

- ▶ Komplexität: $\Theta(n^3)$

Elementare Zeilenumformungen:

- ▶ Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren
- ▶ zwei Zeilen vertauschen
- ▶ Vielfaches einer Zeile berechnen

für lineare Systeme: Gauss-Elimination auf erweiterter Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} M_{11} & \cdots & M_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Gauss Elimination

Gauss-Elimination: Überführung der Matrix A in **Dreiecksform** durch **elementare Zeilenumformungen**

- ▶ Komplexität: $\Theta(n^3)$

Gauss-Jordan-Elimination: Überführung der Matrix A in **Diagonalform** durch **elementare Zeilenumformungen**

- ▶ Komplexität: $\Theta(n^3)$

Elementare Zeilenumformungen:

- ▶ Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren
- ▶ zwei Zeilen vertauschen
- ▶ Vielfaches einer Zeile berechnen

für lineare Systeme: Gauss-Elimination auf erweiterter Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} M_{11} & \cdots & M_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Gauss Elimination: Beispiel

$$2x + y - z = 8 \quad (G_1)$$

$$-3x - y + 2z = -11 \quad (G_2)$$

$$-2x + y + 2z = -3 \quad (G_3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{G_2 += \frac{3}{2}G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_3 += G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{G_3 += -4G_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_1/2, G_2 \cdot 2, G_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Lösung nun durch **Rücksubstitution**: $z = -1$, $y = 3$ und $x = 2$

Gauss Elimination: Beispiel

$$2x + y - z = 8 \quad (G_1)$$

$$-3x - y + 2z = -11 \quad (G_2)$$

$$-2x + y + 2z = -3 \quad (G_3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{G_2 += \frac{3}{2}G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_3 += -G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{G_3 += -4G_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_1/2, G_2 \cdot 2, G_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Lösung nun durch **Rücksubstitution**: $z = -1$, $y = 3$ und $x = 2$

Gauss Elimination: Beispiel

$$2x + y - z = 8 \quad (G_1)$$

$$-3x - y + 2z = -11 \quad (G_2)$$

$$-2x + y + 2z = -3 \quad (G_3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{G_2 += \frac{3}{2}G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_3 += -G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{G_3 += -4G_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_1/2, G_2 \cdot 2, G_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Lösung nun durch **Rücksubstitution**: $z = -1$, $y = 3$ und $x = 2$

Gauss Elimination: Beispiel

$$2x + y - z = 8 \quad (G_1)$$

$$-3x - y + 2z = -11 \quad (G_2)$$

$$-2x + y + 2z = -3 \quad (G_3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{G_2 += \frac{3}{2}G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_3 += G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{G_3 += -4G_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_1/2, G_2 \cdot 2, G_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Lösung nun durch **Rücksubstitution**: $z = -1$, $y = 3$ und $x = 2$

Gauss Elimination: Beispiel

$$2x + y - z = 8 \quad (G_1)$$

$$-3x - y + 2z = -11 \quad (G_2)$$

$$-2x + y + 2z = -3 \quad (G_3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{G_2 += \frac{3}{2}G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_3 += G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{G_3 += -4G_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_1/2, G_2 \cdot 2, G_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Lösung nun durch **Rücksubstitution**: $z = -1$, $y = 3$ und $x = 2$

Gauss Elimination: Beispiel

$$2x + y - z = 8 \quad (G_1)$$

$$-3x - y + 2z = -11 \quad (G_2)$$

$$-2x + y + 2z = -3 \quad (G_3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{G_2 += \frac{3}{2}G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_3 += G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{G_3 += -4G_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_1/2, G_2 \cdot 2, G_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Lösung nun durch Rücksubstitution: $z = -1$, $y = 3$ und $x = 2$

Gauss Elimination: Beispiel

$$2x + y - z = 8 \quad (G_1)$$

$$-3x - y + 2z = -11 \quad (G_2)$$

$$-2x + y + 2z = -3 \quad (G_3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{G_2 += \frac{3}{2}G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_3 += G_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{G_3 += -4G_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{G_1/2, G_2 \cdot 2, G_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Lösung nun durch **Rücksubstitution**: $z = -1$, $y = 3$ und $x = 2$

Gauss Elimination: Algorithmus

```
1 Gauss(M)
2   for (j=0; j<n-1; j++)
3     foundNonZero = false;
4     for (i=j; i<n-1; i++)
5       if (Mij != 0)
6         swap(i, j);
7         foundNonZero = true;
8         break;
9     if (!foundNonZero)
10      printf("Matrix not invertible");
11      return;
12     for (i=j+1; i<n-1; i++)
13       Mi += -(Mij/Mjj)*Mj;
```

- ▶ Laufzeit: Die äußere Schleife wird n mal durchlaufen; die inneren Schleifen $\leq n$ mal. D.h. jede Operation wird höchstens n^2 mal ausgeführt.
- ▶ Die swap-Operation in Zeile 5 und die Operation in Zeile 11 sind aber nicht elementar und benötigen Laufzeit $\mathcal{O}(n)$.

Erklärung

- ▶ j geht über die Spalten; und i über die Zeilen;
- ▶ Zu Beginn der von Iteration j , haben alle Zeilen $i \geq j$ Nullen in Spalten ℓ mit $\ell < j$.
- ▶ In Iteration j bekommen die Zeilen $i > j$ Nullen in Spalte ℓ ;
- ▶ Die Zeile j soll aber in Spalte j einen Wert $M_{jj} \neq 0$ haben; dazu wird erst nach einer geeigneten Zeile gesucht (in den Zeilen mit $i \geq j$) und ggfs. eine Vertauschung vorgenommen. Falls dies fehlschlägt haben **alle** Zeilen $i \geq j$ Nullen in Spalte ℓ mit $1 \leq \ell \leq j$. D.h., diese insgesamt $n - j$ Zeilen haben höchstens $n - j - 1$ Spalten, die nicht Null sind. Damit sind diese Zeilen linear abhängig und die Matrix ist nicht invertierbar.
- ▶ In einer Iteration der for-Schleife in Zeile 11 wird die j -te Zeile mit einem geeigneten Vielfachen multipliziert und zu der i -ten Zeile addiert, so daß letztere einen Nulleintrag in Spalte j bekommt.

Inverse via Gauss-Jordan Elimination

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- ▶ Bilde erweiterte Matrix

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{n1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

wobei I_n die $n \times n$ Identitätsmatrix ist.

- ▶ Führe Gauss-Jordan Elimination für A aus (linker Teil) bis auf I_n reduziert, repliziere elementare Zeilenumformungen für I_n (rechter Teil).
- ▶ Am Ende entspricht rechter Teil A^{-1} .

Pseudoinverse

Falls $A^T A$ nicht invertierbar ist die Pseudoinverse gegeben durch die Matrix A^+ , die folgende Bedingungen erfüllt:

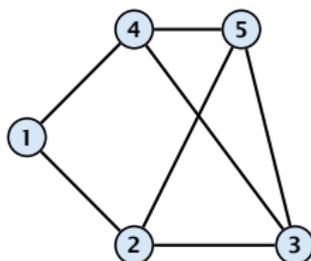
- ▶ $AA^+A = A$
- ▶ $A^+AA^+ = A^+$
- ▶ $(AA^+)^T = AA^+$
- ▶ $(A^+A)^T = A^+A$

Theorem

Diese Matrix existiert immer.

Anwendung

gegeben: ungerichteter Graph $G = (V, E)$



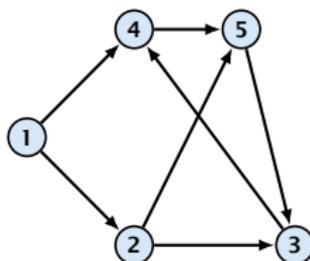
weise Kanten beliebige Richtungen zu (Zählpfeile)

Definition: Die **Knoten-Kanten Inzidenzmatrix** B ist wie folgt definiert:

- ▶ eine Zeile für jede Kante; eine Spalte für jeden Knoten
- ▶ die Zeile für Kante $e = (u, v)$ enthält ein 1 in Spalte u und eine -1 in Spalte v

Anwendung

gegeben: ungerichteter Graph $G = (V, E)$

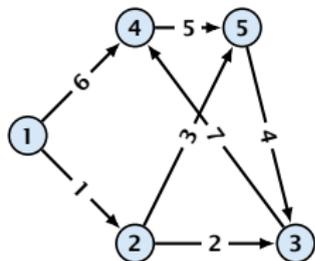


weise Kanten beliebige Richtungen zu (Zählpfeile)

Definition: Die **Knoten-Kanten Inzidenzmatrix** B ist wie folgt definiert:

- ▶ eine Zeile für jede Kante; eine Spalte für jeden Knoten
- ▶ die Zeile für Kante $e = (u, v)$ enthält ein 1 in Spalte u und eine -1 in Spalte v

Anwendung



$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_B$$

Angenommen Vektor x ordnet jedem Knoten ein Potential zu und die Kanten des Graphen haben Widerstand 1.

Bx = Vektor von Strömen entlang der Kanten

Anwendung

Bx = Vektor von Strömen entlang der Kanten

$\underbrace{B^T B}_L x$ = Vektor von Strömen aus Knoten

Gegeben: Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ der Ein- und Ausgangsströme für alle Knoten angibt (z.B. einfach +1 an Knoten v und -1 an Knoten u bei einer Stromquelle zwischen diesen Knoten).

Löse

$$Lx = b$$

$L^+ b$ ist die Lösung der Gleichung die $\|x\|_2$ minimiert.