# Kürzeste Wege

**Wie kommt man am schnellsten von A nach B?**



# 9 Kürzeste Wege

Gegeben gewichteter, gerichteter graph $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}$.

- SSSP (single source shortest paths):
  finde kürzesten Weg von Quelle $s$ zu allen anderen Knoten
- APSP (all pairs shortest paths):
  finde kürzesten Weg zwischen allen Knotenpaaren

Manchmal wird auch von SSSP/APSP geredet wenn man nur die Länge der entsprechenden Wege berechnen möchte.

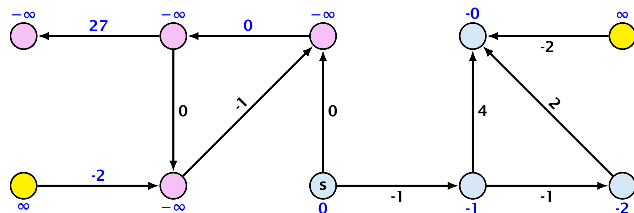


# 9 Kürzeste Wege

Die Distanz $d(x, y)$ zwischen Knoten $x$ und $y$ ist die Länge eines kürzesten Weges.

Formal:

$$d(s,v) = \begin{cases} +\infty & \text{kein Pfad von } s \text{ nach } v \\ -\infty & \text{kein kürzester Pfad von } s \text{ nach } v \\ \min_{p \text{ path from } s \text{ to } v} w(p) & \text{sonst} \end{cases}$$






# 9 Kürzeste Wege

Varianten des Problems:

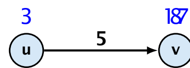
- uniform Gewichte (alle 1)
  BFS, Laufzeit $\mathcal{O}(m + n)$
- beliebige Gewichte in einem DAG (**D**irected **A**cyclic **G**raph)
  Topologische Sortierung + Kantenrelaxierung, Laufzeit $\mathcal{O}(m + n)$
- beliebiger Graph mit nichtnegativen Gewichten
  Dijkstras Algorithmus,
  Laufzeit $\mathcal{O}((m + n) \log n)$ oder $\mathcal{O}(m + n \log n)$
- beliebiger Graph mit beliebigen Gewichten
  a) ohne negative Zyklen
  b) mit negativen Zyklen

## Kürzeste Wege

**Idee SSSP:**

- Jeder Knoten $v$ hat Distanzlabel $\text{dist}(v)$.
- Anfangs ist $\text{dist}(s) = 0$ und $\text{dist}(v) = \infty$, d.h. $\text{dist}(x) \geq d(s,x)$ für alle Knoten $x$.
- Führe Kantenrelaxierungen durch...

**Kantenrelaxierung:**




$$\text{dist}(v) := \min\{\text{dist}(v), \text{dist}(u) + w(u,v)\}$$

es gilt immer noch $\text{dist}(v) \geq d(s,v)$...



## Kürzeste Wege

**Beobachtung:**

- Es gilt immer $\text{dist}(v) \geq d(s,v)$ für alle Knoten.

**Hoffnung:**
Wenn wir genug Relaxierungen durchführen haben wir die richtigen Distanzen, da Distanzlabel nur kleiner werden.

Bei negativen Kreisen funktioniert das nicht.

Annahme: keine negativen Kreise.
$\Longrightarrow$ die kürzesten Pfade haben endlich viele „hops“.



## Kürzeste Wege

Kanten können in der Sequenz häufiger vorkommen, d.h., $e_5$ und $e_{10}$ könnten z.B. die gleiche Kante bezeichnen.

Sei $\mathcal{R} = R_1, R_2, R_3, \ldots$ eine Folge von Kantenrelaxierungen, wobei die $i$-te Relaxierung $R_i$ auf Kante $e_i$ operiert.

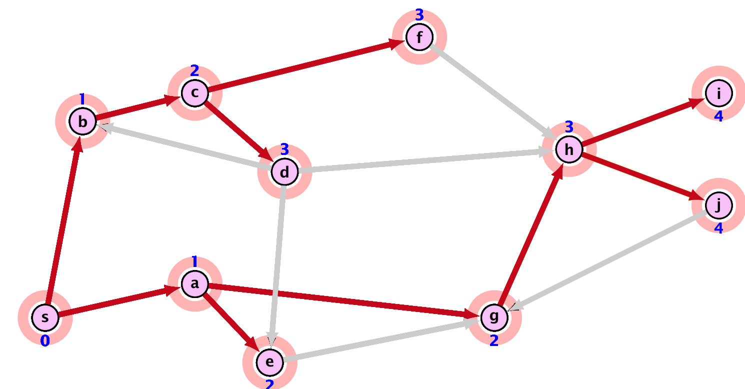
Sei $p = (s = v_0, v_1, \ldots, v_k = x)$ ein kürzester Pfad von $s$ nach $x$, und sei $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ die $i$-te Kante dieses Pfades ($1 \leq i \leq k$).

**Beobachtung**
Falls ein $k$-elementige Teilfolge $S = S_1, S_2, \ldots$ von $\mathcal{R}$ existiert bei der $S_i$ auf Kante $a_i$ operiert hat der Knoten $x$ nach Abarbeitung von $\mathcal{R}$ das richtige Distanzlabel.

Beweis: durch vollständige Induktion; nachdem $S_i$ durchgeführt ist hat $v_i$ das korrekte Distanzlabel;



## Uniforme Kantengewichte – BFS




visit-operation:

- relaxiere alle ausgehenden Kanten
- füge unbesuchte Nachbarn in Queue ein

## Kürzeste Wege

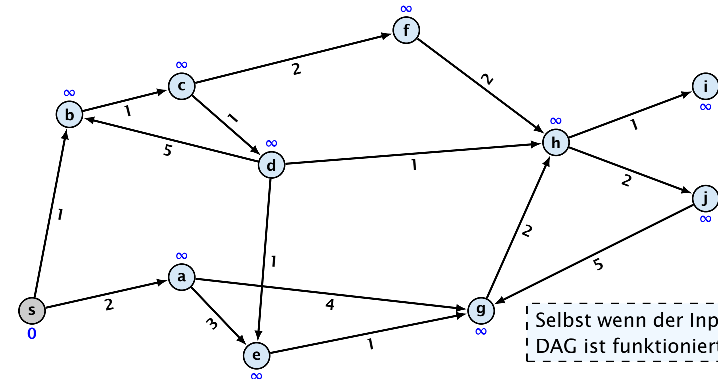
Der Level ist die hop-Distanz von $s$ zu $v$; bei uniformen Kantengewichten entspricht dies der tatsächlichen Distanz.

- in der ersten Runde wird für jeden Level 1 Knoten eine eingehende Kante von Level 0 relaxiert
- in der zweiten Runde wird für jeden Level 2 Knoten eine eingehende Kante von Level 1 relaxiert
- ...

Bei einem kürzesten Pfad werden Relaxierungen in der Reihenfolge des Pfades durchgeführt.



## Beliebige Gewichte – BFS funktioniert nicht



Selbst wenn der Inputgraph ein DAG ist funktioniert BFS nicht.

visit-operation:

- relaxiere alle ausgehenden Kanten
- füge unbesuchte Nachbarn in Queue ein

Kante $(d,e)$ wird nach $(e,g)$ relaxiert. Deshalb hat Knoten $g$ am Ende falsche Distanz. Kante $(d,h)$ wird erfolgreich relaxiert; der Vorgänger von $h$ ist aber $g$ (nach BFS-Regel).

## Kürzeste Wege in DAGs

finNum(v) ist die bei DFS berechnete Reihenfolge, in der die rekursiven Aufrufe von dfsVisit(v) enden.

In DAGs existiert topologische Sortierung der Knoten:

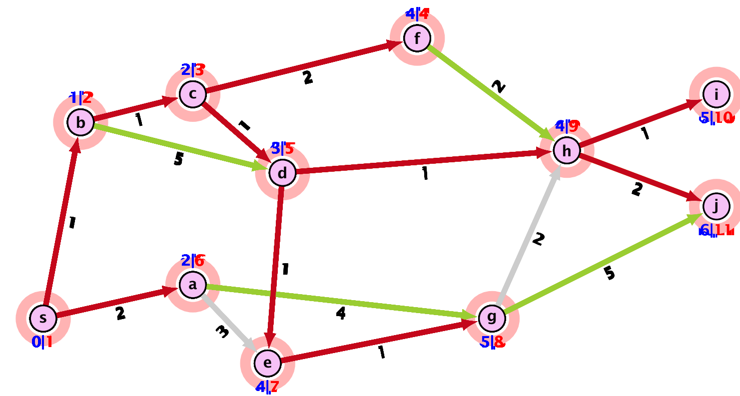
- $\text{top} : V \to \{1,\dots,n\}$, bijektiv
- für alle $(x,y) \in E$: $\text{top}(x) < \text{top}(y)$

Zum Beispiel: $\text{top}(v) = n - \text{finNum}(v) + 1$.

```
1  Input: weighted DAG G=(V,E,w); start vertex s;
2         array top mit top[i] i-ter Knoten in TopSort
3  Output: key-field of node contains distance from s;
4
5  ShortestPathDag(s,top)
6      foreach v ∈ V
7          v->key = ∞;
8      s->key = 0;
9      for i = 1 to n do
10         v = top[i];
11         foreach x ∈ N[v]
12             x->key = min(v->key + w(v,x),x->key);
```

## Kürzeste Wege in DAGs

Besuche Knoten gemäß topologischer Sortierung. Wenn man Knoten $x$ besucht führe Relaxierung von ausgehenden Kanten durch (Kante $(x,y)$): $\text{dist}(y) := \min\{\text{dist}(x) + w(x,y), \text{dist}(y)\}$.



Funktioniert für beliebige Kantengewichte.

## Kürzeste Wege in DAGs

**Korrektheit:**
Für **jeden** Pfad werden die Relaxierungen in der Reihenfolge des Pfades durchgeführt.



## Kürzeste Wege in DAGs

**Laufzeit:**

DFS für topologische Sortierung

- Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$

Danach besucht der Algorithmus jede Kante genau einmal.
Zusätzlich wird jeder Knoten besucht:

- Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$

Also, Gesamtlaufzeit $\mathcal{O}(n+m)$.



## Beliebige Graphen — nichtnegative Gewichte

Eingabe:

- beliebiger Graph (gerichtet oder ungerichtet)
- nichtnegative Gewichte

Idee:

- Distanzrelaxierungen entlang eines kürzesten $s$-$x$ für alle $x \in V$, $x \neq s$.

Problem:

- führe Relaxierungen in der richtigen Reihenfolge durch

Lösung(?):

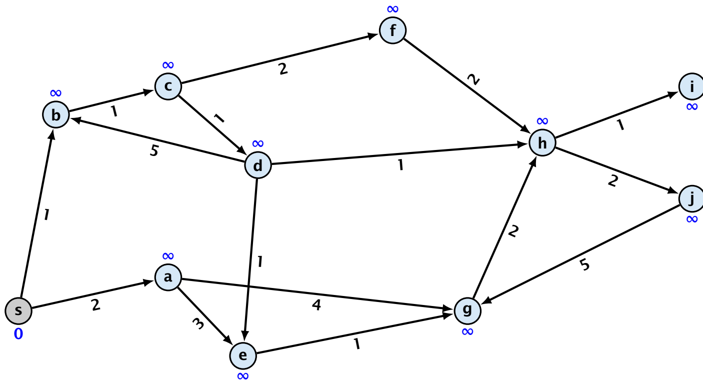
- führe Relaxierungen gemäß der Distanz von $s$ durch



## Dijkstra's Algorithmus

```
1  Input: weighted graph G=(V,E,w); start vertex s;
2  Output: key-field of node contains distance from s;
3
4  Dijkstra(s)
5      S = new PriorityQueue()
6      foreach v ∈ V
7          v->key = ∞;
8          v->par = NULL;
9          v->han = S->insert(v);
10     s->key = 0; S->decreaseKey(s->han,0);
11     while (!S->empty()) {
12         v = S->extractMin();
13         foreach x ∈ N[v]
14             if (x->key > v->key + w(v,x))
15                 S->decreaseKey(x->han,v->key+w(v,x));
16                 x->key = v->key + w(v,x);
17                 x->par = v;
18     }
```

## Beliebige Graphen — nichtnegative Gewichte




## Warum funktioniert das?

**Invariante:**
Sei $A$ die Menge der Knoten, die schon aus der PQ entfernt wurden.

- **A** Das Distanzlabel $x.\text{key}$ erfüllt $x.\text{key} \le w(P)$ für alle $s$-$x$ Pfade $P$ die **entweder** mit Kante $(a,x)$, $a \in A$ enden **oder** leer sind (nur aus Knoten $s$ bestehen).
- **B** Knoten in $A$ haben ihre korrekte Distanz.

Außerdem nutzen wir, dass $x.\text{key}$ eine obere Schranke an die Länge eines kürzesten $s$-$x$ Pfades ist (folgt da wir nur Relaxierungen durchführen).



**Initialisierung:**

- **A** Initial ist $A$ leer; d.h. $s$ ist der einzig erlaubte Pfad. Deshalb ist Invariante erfüllt wenn man $s$ Distanz $0$ gibt and allen anderen Knoten Distanz $\infty$.
- **B** Gilt, da $A$ leer ist.



**Beibehaltung der Invariante:**

- **B** Wir nehmen den Knoten $v$ mit kleinstem key-Wert. Ein Pfad $P$ von $s$ nach $v$ muss Länge mindestens $v.\text{key}$ haben.

  Dies gilt, da der Pfad wenn er $A$ verläßt (zum Knoten $x$) schon Länge mindestens $x.\text{key} \ge v.\text{key}$ hat (durch Invariante A für $x.\text{key}$). Er kann nicht kürzer werden da Kantengewichte nichtnegativ sind.

  Deshalb, ist das Distanzlabel für $v$ korrekt (es ist eine obere Schranke und kein Pfad ist kürzer)

  D.h. Invariante B gilt für $A' = A \cup \{v\}$.

**A** Da $v$ korrekte Distanz hat gilt $x.\text{key} \le w(P)$ für alle Pfade die in Kante $(v,x)$ enden.

Da durch die Invariante gilt, dass $x.\text{key} \le w(P)$ für Pfade, die in $(a,x)$, $a \in A$ enden (oder leer sind), gilt Invariante A für $A' = A \cup \{v\}$.



**Laufzeit:** $m$ decreaseKey Operationen, $n$ Einfügeoperationen, $n$ extractMin() Operationen

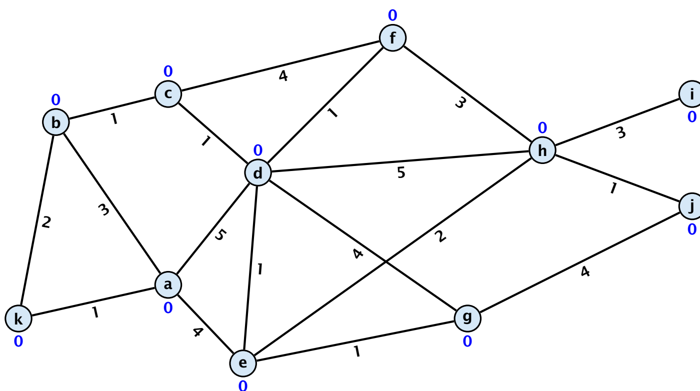
Laufzeit: $\mathcal{O}((m+n)\log n)$.

Eine Laufzeit von $\mathcal{O}(m + n\log n)$ kann man durch Implementierung der Prioritätswarteschlange mit Fibonacciheaps erreichen.



## Minimaler Spannbaum

Welche Kanten sollte man wählen um alle Knoten zu verbinden?



Minimiere Kosten!!!



## Minimaler Spannbaum

**Eingabe:**

- ungerichteter zusammenhängender graph $G = (V,E)$
- positive Kantengewichte (Kosten) $w : E \to \mathbb{R}^+$

**Ausgabe:**

- Teilmenge $T \subseteq E$ s.t. $G = (V,T)$ verbunden und $w(T) = \sum_{e\in T} w(e)$ minimal

**Beobachtung:**

- da Kantengewichte positiv ist $T$ ein Baum

## Minimaler Spannbaum

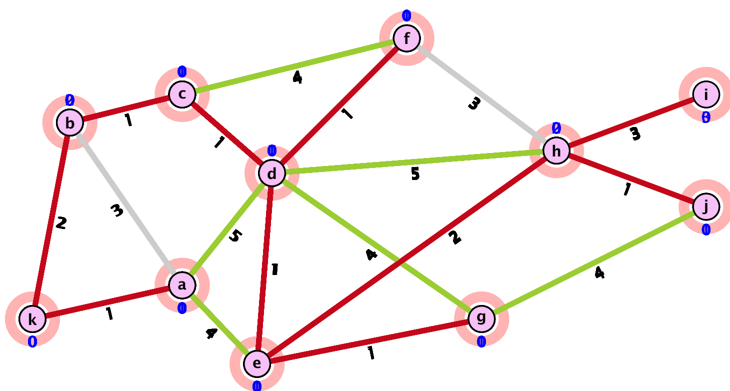
**Lemma 1**
*Sei $X, Y$ eine Partionierung von $V$ (d.h., $X \cup Y = V$ and $X \cap V = \emptyset$), und sei $e = (x, y)$ eine billigste Kante zwischen $X$ und $Y$ Dann existiert ein Minimaler Spannbaum der $e$ enthält.*



## Prims MST-Algorithmus

```
1 Input: weighted graph G=(V,E,w); start vertex s;
2 Output: parent-fields of nodes encode MST;
3
4 PrimMST(s)
5     S = new PriorityQueue()
6     foreach v ∈ V
7         v->key = ∞;
8         v->par = NULL;
9         v->han = S->insert(v);
10    s->key = 0; S->decreaseKey(s->han,0);
11    while (!S->empty()) {
12        v = S->extractMin();
13        foreach x ∈ N[v]
14            if (x->key > w(v,x))
15                S->decreaseKey(x->han,w(v,x));
16                x->key = w(v,x);
17                x->par = v;
18    }
```

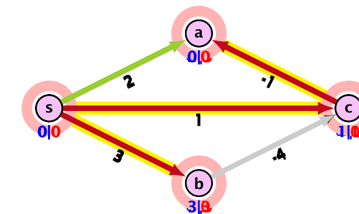
## Minimaler Spannbaum (Prim)





## Negative Kantengewichte

Dijkstra funktioniert nicht:



## Negative Kantengewichte

**Lemma 2**

*Für jeden Knoten $x$ mit $d(s,x) \neq \pm\infty$, existiert ein kürzester Weg mit höchstens $n-1$ Kanten zwischen $s$ und $x$.*

**Beweis:**

- sei $x$ ein Knoten mit $d(s,x) \neq \pm\infty$; dann existiert kürzester Pfad; sei $P$ solch ein Pfad mit wenigsten Kanten
- angenommen, $P$ hat $\geq n$ Kanten (d.h. $\geq n+1$ Knoten)
- dann enthält $P$ einen gerichteten Zyklus $Z$
- wenn $Z$ negatives Gewicht hat gilt $d(s,x) = -\infty$ (↯)
- andernfalls entfernen wir $Z$ aus $P$ und erhalten ein Pfad der Länge höchstens $w(P)$ hat mit weniger hops (↯)



## Bellman-Ford

Für $n-1$ Phasen relaxiert man alle Kanten.

```
1  Input: weighted graph G=(V,E,w); start vertex s;
2  Output: key-field of very node contains distance from s
3
4  NaiveBellmanFord(s)
5      foreach v ∈ V
6          v->key = ∞;
7      s->key = 0;
8      for i = 1 to n-1
9          foreach (x,y) ∈ E
10             y->key = min(y->key, x->key + w(x,y))
```

Für hop-minimalen kürzesten $s$-$x$ Pfad $P$ existiert Teilfolge von Relaxierungen, die $P$ von $s$ nach $x$ abarbeitet.

$\Longrightarrow$ alle Distanzen sind am Ende korrekt, falls man keine negativen Kreise hat

## Bellman-Ford

Wie finden wir Knoten, die von $s$ aus über einen Pfad erreichbar sind der einen Knoten eines negativen Kreises enthält? (Das sind genau die Knoten die Distanz $-\infty$ haben)



## Bellman-Ford

Wir fügen eine weitere Phase hinzu.

**Lemma 3**

*Jeder von $s$ erreichbare negative Zyklus enthält einen Knoten, der in Phase $n$ sein Distanzlabel ändert.*

## Bellman-Ford

**Beweis:**

- Sei $Z$ negativer Zyklus (erreichbar von $s$). Nach Phase $n-1$ haben alle Knoten des Zyklus endliches Label.
- Angenommen kein Knoten in $Z$ ändert sein Label in Phase $n$. Das bedeutet

$$v_{i+1} \to \text{key} \le v_i \to \text{key} + w(v_i, v_{i+1})$$



## Bellman-Ford

D.h. wir müssen nur all Knoten markieren die in Runde $n$ ihr Label ändern (und alle Knoten, die von diesen erreichbar sind).

Dies geschieht durch folgende Routine:

```
1 mark(x)
2     if (x->key != −∞)
3         x->key = −∞;
4         for ((x,y) ∈ E) mark(y)
```

Falls wir $\text{mark}(x)$ für alle Knoten $x \in S \subseteq V$ (für beliebige Teilmenge $S$) aufrufen benötigt dies Zeit $\mathcal{O}(|S| + m)$, da jede Kante nur einmal geprüft wird.



## Bellman-Ford

```
1  BellmanFord(s)
2      foreach v ∈ V
3          v->key = ∞;
4          v->par = NULL;
5      s->key = 0;
6      for i = 1 to n-1
7          foreach (x,y) ∈ E
8              if (y->key > x->key + w(x,y))
9                  y->key = x->key + w(x,y);
10                 y->par = x;
11     foreach (x,y) ∈ E
12         if (y->key > x->key + w(x,y))
13             y->par = x;
14             mark(y)
```

Laufzeit: $\mathcal{O}(mn)$

## Bellman-Ford

**Invariante:**

Nach der $\ell$-ten Runde zeigt parent-Zeiger von $x$ auf den Vorgänger von $x$ auf einem kürzesten $s$-$x$ Pfad mit höchstens $\ell$ Kanten.

$x.\text{parent} = \emptyset$ bedeutet **entweder**, dass es keinen $s$-$x$ Pfad mit höchstens $\ell$ Kanten gibt **oder** dass der kürzeste dieser Pfade leer ist ($s = x$).

**Nach Terminierung:**

Für Knoten $v$ mit $d(s,v) \neq \pm\infty$ führen die parent pointer von $x$ nach $s$ (rückwärts entlang kürzestem $s$-$v$ Pfad).

Wenn man den parent-Zeigern von Knoten $v$ mit $d(s,v) = -\infty$ folgt gelangt man zu einem negativen Kreis (dies kann man nutzen um einen negativen Kreis zu finden).

## Bellman-Ford

**Verbesserung**

- Benutze Queue, die Knoten speichert zu denen ein kürzerer Pfad gefunden wurde (und deren ausgehende Kanten deshalb relaxiert werden müssen).
- Wiederhole:
  Entferne Element $x$ aus der Queue und relaxiere ausgehende Kanten.

  Falls Relaxierung entlang Kante $(x, y)$ erfolgreich wird $y$ in die Queue aufgenommen (falls noch nicht enthalten).

  Runde/Phase endet wenn wenn die zu Anfang der Phase in der Queue enthaltenen Knoten bearbeitet sind.



## APSP – Floyd Warshall

gegeben:

- Graph mit beliebigen Kantengewichten; keine negativen Kreise

gesucht:

- Distanzen/kürzeste Weg zwischen allen Knotenpaaren.

Naive Strategie

- $n$-mal Bellman-Ford. Laufzeit $\mathcal{O}(m \cdot n^2)$.



## APSP – Floyd Warshall

**Beobachtung:**
geht der kürzeste $u$-$w$ Pfad über $v$ dann sind auch die Teile von $u$ nach $v$ und $v$ nach $w$ kürzeste Pfade.

**Dynamisches Programmieren:**

- Berechne kürzeste Wege $P_A(u, w)$ von $u$ nach $w$, die nur Zwischenknoten aus Menge $A$ benutzen (initial ist Menge $A$ leer).
- Wenn man alle Pfade $P_A(u, w)$ kennt, kann man einfach die Pfade $P_{A\cup\{v\}}(u, w)$ berechnen.
- Am Ende möchten wir $P_V(u, w)$ für alle Paare $u, w$ kennen.



## APSP – Floyd Warshall

```
1  Input: weighted graph G=(V,E,w);
2  Output: d[u,v] is distance from u to v; pred[u,v]
3          is predecessor of v on shortest path tree from u
4
5  FloydWarshall(G)
6      for u,v ∈ V
7          d[u,v]    = ∞;
8          pred[u,v] = NULL;
9      for v ∈ V
10         d[u,v]    = 0;
11     for (u,v) ∈ E
12         d[u,v]    = w(u,v);
13         pred[u,v] = u;
14     for v ∈ V
15         for {u,w} ∈ V × V
16             if (d[u,w] > d[u,v] + d[v,w])
17                 d(u,w)    = d(u,v) + d(v,w);
18                 pred(u,w) = pred(v,w);
```

## APSP – Floyd Warshall

- Komplexität $\mathcal{O}(n^3)$
- funktioniert auch bei Kanten mit negativem Gewicht
- Kreise negativer Länge verfälschen das Ergebnis; können aber durch negative Diagonaleinträge in der Ergebnismatrix erkannt werden.