

# 13 Hashing

## Wörterbuchoperationen:

- ▶  **$S.insert(x)$** : Füge Element  $x$ .
- ▶  **$S.delete(x)$** : Lösche das durch  $x$  referenzierte Element.
- ▶  **$S.search(k)$** : Gib eine Referenz auf Element  $e$  zurück mit  $key[e] = k$  falls existent; andernfalls gib **NULL** zurück.

Suchbäume unterstützen diese Operationen mit Laufzeit  $\mathcal{O}(\log n)$ . Es werden Vergleichselemente ausgewählt.

Dann wird ein Objekt gesucht indem schrittweise mit diesen Elementen verglichen wird.

**Hashing** versucht **direkt** den Speicherort des jeweiligen Objektes zu berechnen. Das Ziel ist eine **konstante** Suchzeit.

# 13 Hashing

## Definitionen:

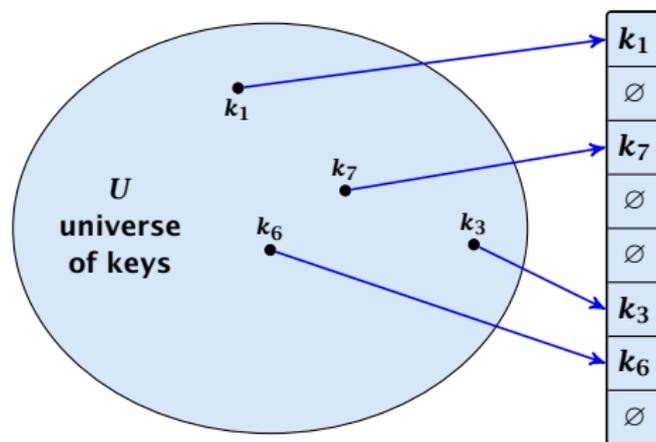
- ▶ Universum  $U$  von Schlüsseln, e.g.,  $U \subseteq \mathbb{N}_0$ .  $U$  sehr groß.
- ▶ Teilmenge  $S \subseteq U$  von Schlüsseln,  $|S| = m \leq |U|$ .
- ▶ Array  $T[0, \dots, n-1]$  Hashtabelle.
- ▶ Hashfunktion  $h : U \rightarrow [0, \dots, n-1]$ .

## Die Hashfunktion $h$ sollte:

- ▶ schnell auswertbar sein
- ▶ gut zu speichern (klein)
- ▶ eine gute Verteilung der Elemente über die Hashtabelle garantieren

# Direkte Adressierung

Idealerweise bildet die Hashfunktion **alle** Elemente auf unterschiedliche Tabelleneinträge ab.



Diesen Spezialfall nennt man **Direkte Adressierung**. Selten möglich, da das Universum üblicherweise zu groß ist.

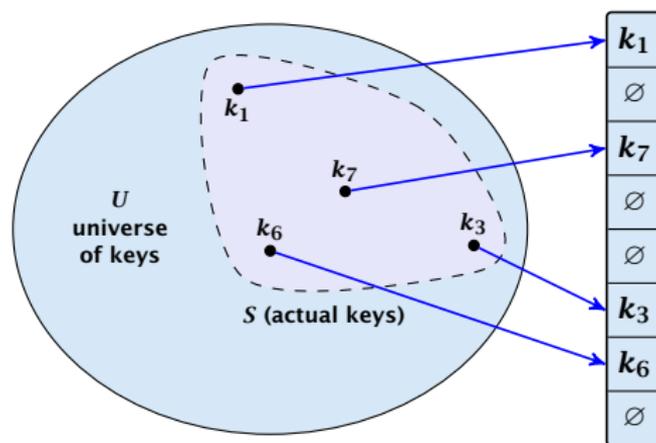
# Direkte Adressierung

## Operationen

- ▶ `insert(x)`  
`A[x->key]=x`
- ▶ `search(k)`  
`return A[k]`
- ▶ `delete(x)`  
`A[x->key]=NULL`

# Perfektes Hashing

Angenommen wir **kennen** die Menge  $S$  der auftretenden Schlüssel (kein Löschen/ kein Einfügen). Dann möchte man eine **einfache** Hashfunktion finden, die alle Schlüssel auf unterschiedliche Positionen abbildet.



Solche eine Hashfunktion  $h$  nennt man eine **perfekte Hashfunktion** für Menge  $S$ .

# Perfektes Hashing

## Operationen

- ▶ `insert(x)`  
 $A[h(x \rightarrow \text{key})] = x$
- ▶ `search(k)`  
return  $A[h(k)]$
- ▶ `delete(x)`  
 $A[h(x \rightarrow \text{key})] = \text{NULL}$

# Kollisionen

Falls wir die Schlüssel nicht kennen, ist das beste, dass die Hashfunktion diese gleichmäßig über die Tabelle verteilt.

## Problem: Kollisionen

Üblicherweise ist das Universum  $U$  viele größer als die Tabellengröße  $n$ .

Zwei Elemente  $k_1, k_2$  aus  $S$  können auf den gleichen Speicherort abbilden (d.h.,  $h(k_1) = h(k_2)$ ). Dies nennt man eine **Hashkollision**.

# Kollisionen

Typischerweise treten Kollisionen auf wenn die Anzahl der Elemente  $S$  sich  $\Theta(\sqrt{n})$  nähert.

## Lemma 1

Die Wahrscheinlichkeit einer Kollision bei *uniformem Hashing* wenn  $m$  Elemente in eine Tabelle der Größe  $n$  abgebildet werden ist mindestens

$$1 - e^{-\frac{m(m-1)}{2n}} \approx 1 - e^{-\frac{m^2}{2n}} .$$

## Uniformes Hashing:

Die Hashfunktion ist eine zufällige Funktion aus der Menge aller Funktionen  $f : U \rightarrow [0, \dots, n - 1]$ .

Uniformes Hashing ist nicht praktikabel, da solch eine Hashfunktion sehr viel Speicherplatz benötigt.

# Kollisionen

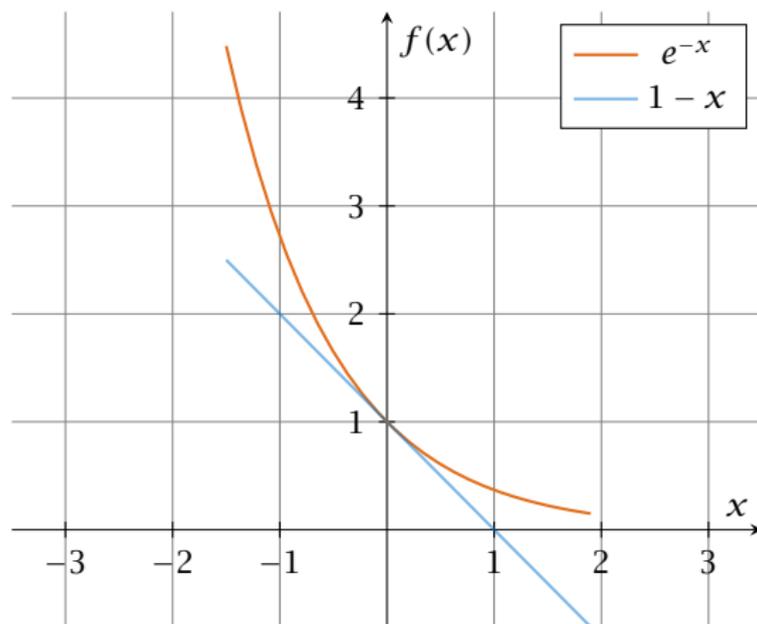
## Beweis.

Sei  $A_{m,n}$  das Ereignis dass das Einfügen von  $m$  Schlüsseln in eine Tabelle der Größe  $n$  **keine** Kollision verursacht. Dann

$$\begin{aligned}\Pr[A_{m,n}] &= \prod_{\ell=1}^m \frac{n - \ell + 1}{n} = \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \\ &\leq \prod_{j=0}^{m-1} e^{-j/n} = e^{-\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{n}} = e^{-\frac{m(m-1)}{2n}}.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung folgt, da das  $\ell$ -te Element das gehashed wird mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{n-\ell+1}{n}$  keine Kollision verursacht (unter der Bedingung, dass die vorherigen Elemente nicht kollidiert sind). □

# Kollisionen



Die Ungleichung  $1 - x \leq e^{-x}$  erhält man wenn man die Taylorentwicklung von  $e^{-x}$  nach dem 2. Term abbricht.

# Kollisionsauflösung

Es gibt zwei Hauptarten der Kollisionsauflösung

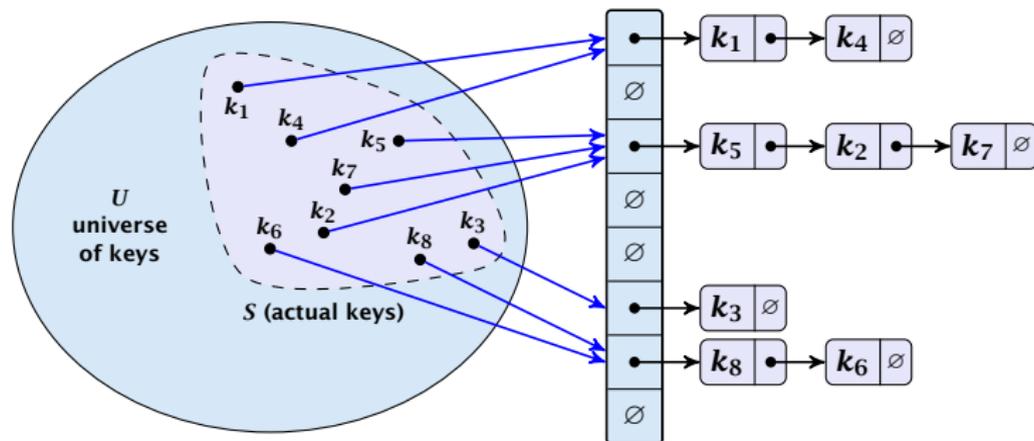
- ▶ **Offen Adressierung** (auch bekannt unter „open addressing“, „closed hashing“)
- ▶ **Hashing mit Verkettung** (auch bekannt unter „hashing with chaining“, „closed addressing“, „open hashing“).

Es gibt Anwendungen (z.B. Computerschach) wo Kollisionen nicht aufgelöst werden.

# Hashing mit Verkettung

Füge Elemente, die auf die gleiche Position abgebildet werden in verkettete Liste ein.

- ▶ Search: berechne  $h(x)$  und durchsuche Liste nach  $x \rightarrow \text{key}$ .
- ▶ Insert: Einfügen am Anfang der Liste;  $\mathcal{O}(1)$
- ▶ Delete: doppelt verkettete Liste:  $\mathcal{O}(1)$   
einfach verkettete Liste: suchen +  $\mathcal{O}(1)$



# Hashing mit Verkettung

Im worst-case werden alle Elemente auf eine Liste gemapped.

Laufzeit dann  $\Omega(n)$  für `search`.

**sehr schlecht**

**Auswege:**

- ▶ average-case Analyse
- ▶ Randomisierung; bestimme **erwartete Laufzeit** für die Wahl einer **zufälligen** Hashfunktion aus einer Menge von Hashfunktionen.

# Hashing mit Verkettung

**Uniformes Hashing:** wähle zufällige Hashfunktion aus Menge aller Funktionen

## Lemma

Falls  $m$  Elemente mittels uniformem Hashing in Hashtabelle der Größe  $n$  gespeichert werden dann ist die erwartete Laufzeit einer **search**-Operation  $\mathcal{O}(1 + m/n)$ .

**Speicherverbrauch für Hashfunktion zu groß!**

# Beweis

- ▶ führe  $\text{search}(k)$  aus;
- ▶ erwartete Laufzeit ist  $\mathcal{O}(1 + E[X])$ , wobei  $X$  Zufallsvariable für Länge der Liste  $A[h(k)]$
- ▶ Zufallsvariable  $X_e \in \{0, 1\}$  für jedes Element;  
 $X_e = 1 \Leftrightarrow h(e \rightarrow \text{key}) = h(k)$
- ▶ Listenlänge  $X = \sum_e X_e$
- ▶ erwartete Listenlänge:

$$E[\sum_{e \in S} X_e] = \sum_{e \in S} E[X_e] = \sum_{e \in S} \Pr[X_e = 1] = \sum_{e \in S} 1/n = m/n$$

# c-universelles Hashing

## Definition

Eine Familie  $\mathcal{H}$  von Hashfunktionen auf  $\{0, \dots, n-1\}$  heißt **c-universell** falls für jedes Schlüsselpaar  $k_1, k_2$  gilt, dass

$$|\{h \in \mathcal{H} : h(k_1) = h(k_2)\}| \leq \frac{c}{n} |\mathcal{H}|$$

D.h. bei zufälliger Wahl der Hashfunktion gilt

$$\Pr[h(k_1) = h(k_2)] \leq \frac{c}{n}$$

## Lemma

Falls  $m$  Elemente mittels einer zufälligen Hashfunktion aus einer  $c$ -universellen Klasse in Hashtabelle der Größe  $n$  gespeichert werden dann ist die erwartete Laufzeit einer **search**-Operation  $\mathcal{O}(1 + cm/n)$ .

# Beweis

- ▶  $X_e \in \{0, 1\}$ ;  $X_e = 1 \Leftrightarrow h(e \rightarrow \text{key}) = h(k)$
- ▶ Listenlänge für Schlüssel  $k$  ist:  $X = \sum_{e \in S} X_e$
- ▶ Erwartete Listenlänge

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{e \in S} X_e\right] = \sum_{e \in S} E[X_e] \\ &= \sum_{e \in S} \Pr[X_e = 1] \leq \sum_{e \in S} c/n = cm/n \end{aligned}$$

# Hashing mit Verkettung

## Nachteile:

- ▶ Zeiger erhöhen Speicherverbrauch
- ▶ schlechte Cache-Effizienz

## Vorteile:

- ▶ kein festes Limit für die Anzahl der Elemente
- ▶ Löschen kann effizient implementiert werden

# Offene Adressierung

Alle Objekte werden in der Tabelle gespeichert.

Funktion  $h(k, j)$  definiert Tabellenposition, die im  $j$ -ten Schritt untersucht wird. Werte  $h(k, 0), \dots, h(k, n - 1)$  muss Permutation von  $0, \dots, n - 1$  sein.

**Search( $k$ ):** Versuche Position  $h(k, 0)$ ; falls leer ist Element nicht vorhanden; sonst versuche  $h(k, 1), h(k, 2), \dots$

**Insert( $x$ ):** Suche bis zu einem leeren Tabellenplatz; dort wird das Element eingefügt. Falls die Suche bis  $h(k, n - 1)$  geht (und der Platz nicht leer ist) ist die Tabelle voll.

# Offene Adressierung

Möglichkeiten für  $h(k, j)$ :

▶ **Lineares Sondieren:**

$$h(k, i) = h(k) + i \pmod n$$

(manchmal:  $h(k, i) = h(k) + ci \pmod n$ ).

▶ **Quadratisches Sondieren:**

$$h(k, i) = h(k) + c_1i + c_2i^2 \pmod n.$$

▶ **Doppeltes Hashing:**

$$h(k, i) = h_1(k) + ih_2(k) \pmod n.$$

## Nachteile:

- ▶ nachträgliche Änderung der Tabellengröße sehr aufwändig
- ▶ Löschen schwierig

## Vorteile:

- ▶ Lineares Sondierung ist Cache-effizient;
- ▶ keine Zeiger; geringerer Speicherverbrauch