

## Definition: Ungerichteter Graph

### Definition: Ungerichteter Graph

Ein **ungerichteter Graph** ist ein Paar  $G = (V, E)$  mit

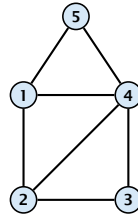
- ▶  $V$  endliche Menge der **Knoten**
- ▶  $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$  Menge der **Kanten**

auf Englisch:

- ▶ Knoten = **vertices**
- ▶ Kanten = **edges**

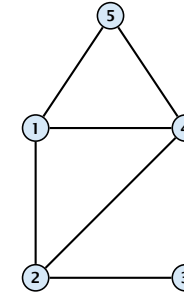
es ist  $\{u, v\} = \{v, u\}$ , d.h. Richtung der Kante spielt keine Rolle

**Beispiel:**



Manchmal erlaubt man auch **Schleifen** (self-loops); dann muss man  $E$  als Multimenge modellieren.

## Ungerichteter Graph: Beispiel



- ▶ Graph  $G_u = (V_u, E_u)$
- ▶ Knoten  $V_u = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ Kanten  $E_u = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

## Definition: Gerichteter Graph

### Definition: Gerichteter Graph

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar  $G = (V, E)$  mit

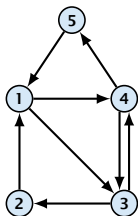
- ▶  $V$  endliche Menge der **Knoten**
- ▶  $E \subseteq V \times V$  Menge der **Kanten**

$$E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\} = V \times V$$

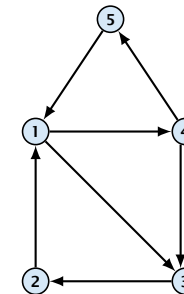
es ist  $(u, v) \neq (v, u)$ , d.h. Richtung der Kante spielt eine Rolle

hier sind Schleifen möglich, d.h. Kanten der Form  $(u, u)$  für  $u \in V$

**Beispiel:**



## Gerichteter Graph: Beispiel



- ▶ Graph  $G_g = (V_g, E_g)$
- ▶ Knoten  $V_g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ Kanten  
 $E_g = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 4)\}$

## Definition: Gewichteter Graph

### Definition: Gewichteter Graph

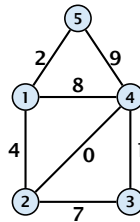
Ein **gewichteter Graph** ist ein Graph  $G = (V, E)$  mit einer Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

der Graph  $G$  kann gerichtet oder ungerichtet sein

je nach Anwendung kann ein verschiedener Wertebereich für die Funktion  $w$  gewählt werden

- ▶ z.B.  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{N}_0$

**Beispiel:**



## Eigenschaften von Graphen I

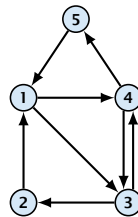
Sei  $G = (V, E)$  ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

- ▶ Ist  $(u, v) \in E$  bzw.  $\{u, v\} \in E$  für  $u, v \in V$ , so heißt  $v$  **adjacent** zu  $u$ .
- ▶ Ein Knoten  $v$  und eine Kante  $e = (x, v)$  or  $e = \{x, v\}$  heißen **inzident**.
- ▶ Sei  $G$  **gerichteter Graph**:
  - ▶ die Anzahl der **eintretenden** Kanten in  $v$  heißt **Eingangsgrad** von  $v$ ,  $\text{indeg}(v) = |\{v' : (v', v) \in E\}|$
  - ▶ die Anzahl der **austretenden** Kanten heißt **Ausgangsgrad** von  $v$ ,  $\text{outdeg}(v) = |\{v' : (v, v') \in E\}|$
- ▶ Sei  $G$  **ungerichteter Graph**:
  - ▶ die Anzahl der eintretenden bzw. austretenden Kanten von  $v$  heißt **Grad** (englisch: degree) von  $v$  oder kurz  $\text{deg}(v)$ .

## Eigenschaften von Graphen: Beispiel

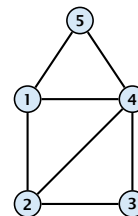
### Beispiel gerichteter Graph:

- ▶ Knoten 1 ist adjacent zu Knoten 2
- ▶ Knoten 2 ist adjacent zu Knoten 3
- ▶  $\text{outdeg}(4) = 2$ ,  $\text{indeg}(4) = 2$
- ▶  $\text{indeg}(2) = 1$ ,  $\text{outdeg}(2) = 1$



### Beispiel ungerichteter Graph:

- ▶ Knoten 4 ist adjacent zu Knoten 2
- ▶ Knoten 2 ist adjacent zu Knoten 4
- ▶  $\text{deg}(2) = 3$
- ▶  $\text{deg}(5) = 2$



## Eigenschaften von Graphen II

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

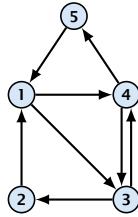
- ▶ Seien  $v, v' \in V$ . Ein **Pfad** von  $v$  nach  $v'$  ist eine Folge von Knoten  $(v_0, v_1, \dots, v_k) \subset V$  mit
  - ▶  $v_0 = v$ ,  $v_k = v'$
  - ▶  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  bzw.  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  für  $i = 0, \dots, k-1$ $k$  heißt **Länge** des Pfades.
- ▶ Ein Pfad heißt **einfach**, falls alle Knoten des Pfades paarweise verschieden sind.

Gibt es einen Pfad von  $u$  nach  $v$ , so heißt  $v$  **erreichbar** von  $u$ .

## Eigenschaften von Graphen II: Beispiel

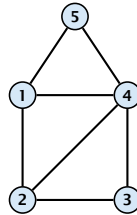
### Beispiel gerichteter Graph:

- ▶  $(2, 1, 3)$  ist ein einfacher Pfad der Länge 2
- ▶  $(1, 4, 5, 1)$  ist ein Pfad der Länge 3, aber nicht einfach
- ▶ 5 ist erreichbar von 1



### Beispiel ungerichteter Graph:

- ▶  $(5, 2, 4, 3, 2)$  ist ein Pfad der Länge 4, aber nicht einfach
- ▶  $(1, 2, 3, 4)$  ist ein einfacher Pfad der Länge 3
- ▶ 3 ist erreichbar von 1



## Eigenschaften von Graphen III

Sei  $G = (V, E)$  Graph.

- ▶ Ein Pfad  $(v_0, \dots, v_k)$  heißt **Zyklus**, falls  $v_0 = v_k$ .
- ▶ Ein Zyklus  $(v_0, \dots, v_k)$  heißt **Kreis**, falls  $v_1, \dots, v_k$  paarweise verschieden sind.

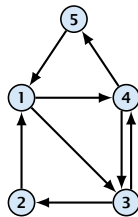
Zyklen der Länge 1 oder 2 heißen **trivial** und werden häufig nicht betrachtet.

Ein Graph ohne Zyklen heißt **azyklisch**.

## Eigenschaften von Graphen III: Beispiel

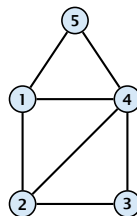
### Beispiel gerichteter Graph:

- ▶  $(2, 1, 3, 4, 3, 2)$  ist ein Zyklus, aber nicht einfach
- ▶  $(2, 1, 3, 2)$  ist ein einfacher Zyklus



### Beispiel ungerichteter Graph:

- ▶  $(2, 1, 3, 2)$  ist ein Zyklus
- ▶  $(1, 5, 4, 1)$  ist ein Zyklus



## Eigenschaften von Graphen IV

Sei  $G = (V, E)$  gerichteter Graph.

- ▶  $G$  heißt **stark zusammenhängend**, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- ▶ Eine **starke Zusammenhangskomponente** von  $G$  ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von  $G$ .
  - ▶ alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezuglich Relation "gegenseitig erreichbar"

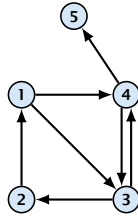
Sei  $G = (V, E)$  ungerichteter Graph.

- ▶  $G$  heißt **zusammenhängend**, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- ▶ Eine **Zusammenhangskomponente** von  $G$  ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von  $G$ .
  - ▶ alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezuglich Relation "erreichbar von"

## Eigenschaften von Graphen IV: Beispiel

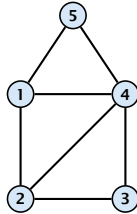
### Beispiel gerichteter Graph:

- ▶ Graph ist **nicht** stark zusammenhängend (z.B. 3 nicht erreichbar von 5)
- ▶ starke Zusammenhangskomponenten:  $\{1, 2, 3, 4\}$  und  $\{5\}$



### Beispiel ungerichteter Graph:

- ▶ Graph ist zusammenhängend
- ▶ nur eine Zusammenhangskomponente:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$



## Darstellung von Graphen: Adjazenzmatrizen

### Adjazenzmatrix

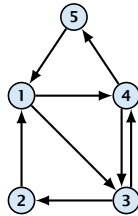
Sei  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Die Adjazenzmatrix von  $G$  speichert die vorhandenen Kanten in einer  $n \times n$  Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

- ▶  $A(i, j) = 1$  falls Kante von Knoten  $v_i$  zu  $v_j$  existiert
- ▶  $A(i, j) = 0$  falls keine Kante von Knoten  $v_i$  zu  $v_j$  existiert für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

## Eigenschaften von Graphen: Adjazenzmatrizen

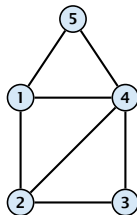
### Beispiel gerichteter Graph:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



### Beispiel ungerichteter Graph:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## Adjazenzmatrizen: Eigenschaften

Eigenschaften von Adjazenzmatrizen zu Graph  $G = (V, E)$

- ▶ sinnvoll wenn der Graph nahezu **vollständig** ist (d.h. fast alle möglichen Kanten tatsächlich in  $E$  liegen)
- ▶ Speicherkomplexität:  $O(|V|^2)$
- ▶ bei **ungerichteten** Graphen ist die Adjazenzmatrix **symmetrisch**
- ▶ bei **gewichteten** Graphen kann man statt der 1 in der Matrix das Gewicht der Kante eintragen

## Darstellung von Graphen: Adjazenzlisten

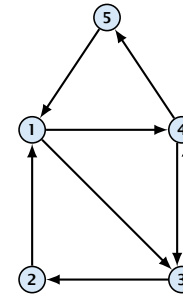
### Adjazenzliste

Sei  $G = (V, E)$  gerichteter Graph. Eine Adjazenzliste von  $G$  sind  $|V| + 1$  verkettete Listen, so daß

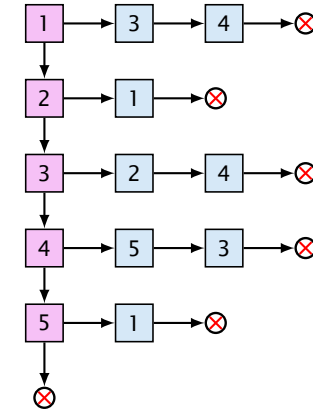
- ▶ die erste Liste alle Knoten enthält
- ▶ für jeden Knoten  $v$  eine Liste angelegt wird mit allen Knoten, die durch eine von  $v$  austretende Kante zu erreichen sind

## Adjazenzliste: Beispiel

### Graph



### Adjazenzliste



## Adjazenzliste: Eigenschaften

Eigenschaften von Adjazenzlisten zu Graph  $G = (V, E)$

- ▶ sinnvoll bei dünn besetzten Graphen mit wenigen Kanten
- ▶ Speicherkomplexität:  $O(|V| + |E|)$
- ▶ bei **ungerichteten** Graphen gleiches Verfahren
  - ▶ allerdings muß jede Kante zweimal gespeichert werden
- ▶ bei **gewichteten** Graphen kann man die Gewichte mit in den verketteten Listen der jeweiligen Knoten speichern

## Komplexität der Darstellungen

Sei  $G = (V, E)$  Graph.

| Operation       | Adjazenzmatrix | Adjazenzliste      |
|-----------------|----------------|--------------------|
| Kante einfügen  | $O(1)$         | $O( V )$           |
| Kante löschen   | $O(1)$         | $O( V )$           |
| Knoten einfügen | $O( V ^2)$     | $O(1)$             |
| Knoten löschen  | $O( V ^2)$     | $O( V  + \deg(v))$ |

- ▶ falls Größe im Vorhinein bekannt, kann Knoten löschen/einfügen bei Adjazenzmatrix effizienter implementiert werden
- ▶ Löschen von Knoten ist immer aufwendig, da auch alle Kanten von/zu diesem Knoten gelöscht werden müssen

## Algorithmen auf Graphen

### Ausblick auf Algorithmen auf Graphen:

- ▶ Traversierung (Durchlaufen) von allen Knoten
  - ▶ Depth-First Search (DFS)
  - ▶ Breadth-First Search (BFS)
- ▶ kürzester Pfad zwischen Knoten in Graphen
- ▶ minimaler Spannbaum (minimum spanning tree, MST)

## Bäume

**Bäume** sind alltägliches Mittel zur Strukturierung:

- ▶ Stammbaum
- ▶ Hierarchie in Unternehmen
- ▶ Systematik in der Biologie
- ▶ etc.



In **Informatik**:

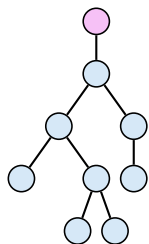
- ▶ Bäume sind spezielle Graphen
- ▶ Wurzel oben!



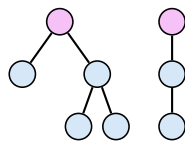
## Definition Wald/Baum

### Definition: Wald und Baum

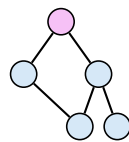
- ▶ Ein azyklischer ungerichteter Graph heißt auch **Wald**.
- ▶ Ein zusammenhängender, azyklischer ungerichteter Graph heißt auch **Baum**.



Baum



Wald



kein Baum

## Eigenschaften von Bäumen

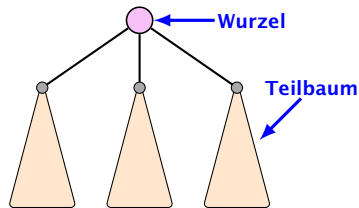
Sei  $G = (V, E)$  ein **Baum**.

- ▶ jedes Paar von Knoten  $u, v \in V$  ist durch einen **einzigsten Pfad** verbunden
- ▶  $G$  ist **zusammenhängend**, aber wenn eine Kante aus  $E$  **entfernt** wird, ist  $G$  nicht mehr zusammenhängend
- ▶  $G$  ist **azyklisch**, aber wenn eine Kante zu  $E$  **hinzugefügt** wird, ist  $G$  nicht mehr azyklisch
- ▶ es gilt  $|E| = |V| - 1$

## Wurzel von Bäumen

Sei  $G = (V, E)$  ein Baum.

- ▶ genau ein Knoten  $w \in V$  wird als **Wurzel** ausgezeichnet
- ▶ entfernt man  $w$  erhält man einen Wald von **Teilbäumen**

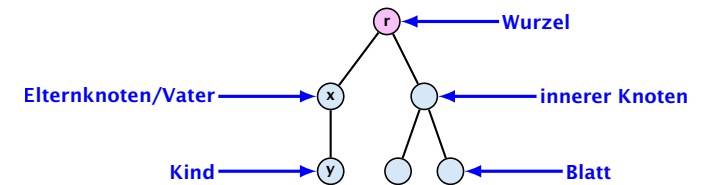


**Hinweis:** manchmal wird zwischen "freiem" und "gewurzelt" Baum unterschieden!

## Weitere Begriffe bei Bäumen I

Sei  $G = (V, E)$  ein Baum mit Wurzel  $w \in V$ .

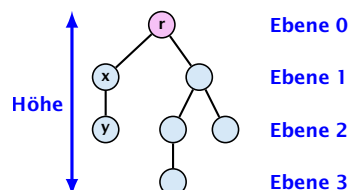
- ▶ jeder Knoten  $v \in V$  mit  $v \neq w$  ist mit genau einer Kante mit seinem **Elternknoten**  $x \in V$  (oder: direkter Vorgänger) verbunden
- ▶  $v$  wird dann als **Kind** (oder: direkter Nachfolger) von  $x \in V$  bezeichnet
- ▶ ein Knoten ohne Kinder heißt **Blatt**, alle anderen Knoten heißen **innere Knoten**



## Weitere Begriffe bei Bäumen II

Sei  $G = (V, E)$  ein Baum mit Wurzel  $w \in V$ .

- ▶ Anzahl der Kinder von Knoten  $x \in V$  heißt auch **Grad** von  $x$ . (**Achtung:** Grad in Graph  $G$  ist anders definiert!)
- ▶ Länge des Pfades von Wurzel  $w$  zu Knoten  $x \in V$  heißt **Tiefe** von  $x$
- ▶ alle Knoten gleicher Tiefe bilden eine **Ebene** des Baumes  $G$
- ▶ maximale Tiefe eines Knotens heißt **Höhe** des Baumes. (manchmal ist Höhe auch als Anzahl der Ebenen definiert)

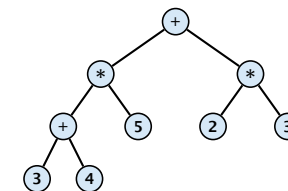


## Bäume: Beispiele

### arithmetischer Ausdruck

$$(3 + 4) * 5 + 2 * 3$$

repräsentiert als Baum:



### hierarchisches Dateisystem

- ▶ Windows z.B. "C:\"
- ▶ Unix "/"

**Suchbaum** → später in der Vorlesung

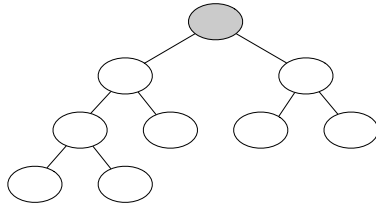
## Besondere Bäume

Sei  $G = (V, E)$  ein Baum mit Wurzel  $w \in V$ .

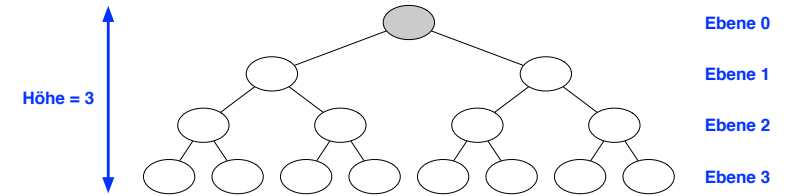
- ▶ sind die Kinder jedes Knotens in bestimmter Reihenfolge angeordnet, heißt  $G$  **geordneter Baum**
- ▶ ist die Anzahl  $n$  der Kinder jedes Knotens vorgegeben, heißt  $G$   **$n$ -ärer Baum**

Wichtiger Spezialfall:

- ▶ ist  $G$  geordnet und hat jeder Knoten maximal zwei Kinder, heißt  $G$  **Binärbaum**



## Beispiel: Binärbaum



Binärbaum mit Höhe 3, 8 Blättern und 7 inneren Knoten.

- ▶ Binärbaum heißt **vollständig**, wenn jede Ebene die maximale Anzahl an Knoten enthält
- ▶ ein vollständiger Binärbaum der Höhe  $k$  hat  $2^{k+1} - 1$  Knoten, davon  $2^k$  Blätter
- ▶ Beweis per Induktion

## Darstellung von Bäumen: als Graph

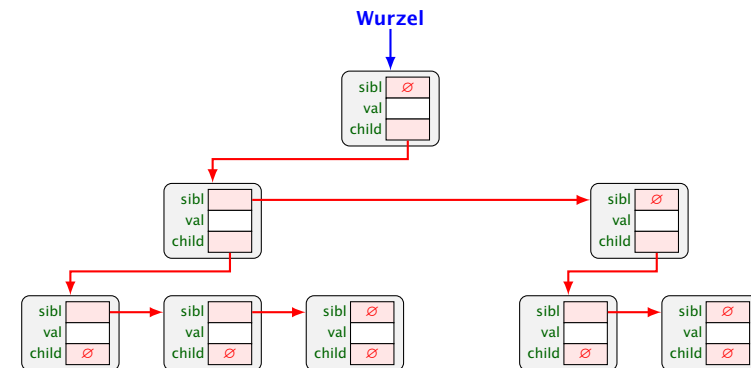
Bäume sind Graphen → Darstellung als

- ▶ Adjazenzmatrix
- ▶ Adjazenzliste

⇒ leider meist **nicht effizient** (sowohl Laufzeit als auch Speicher)



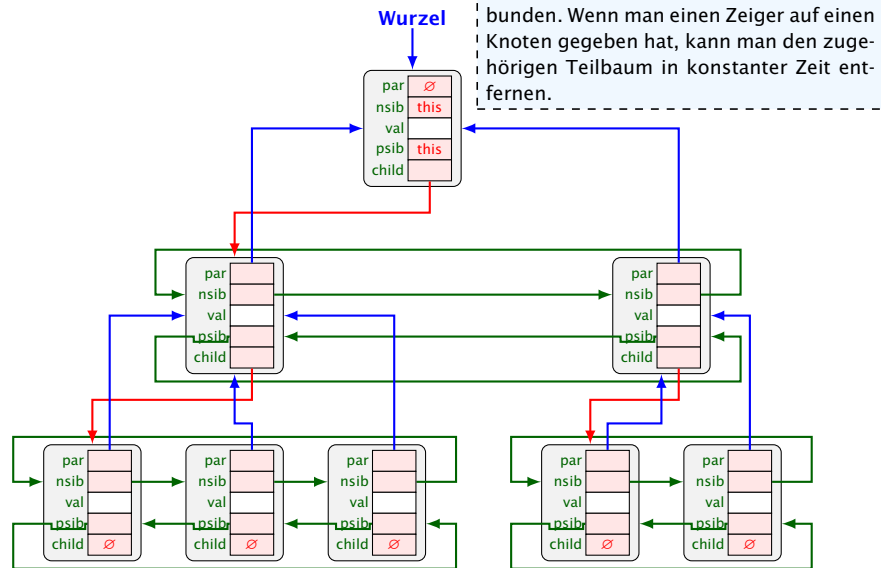
## Darstellung von Bäumen: verkettete Liste



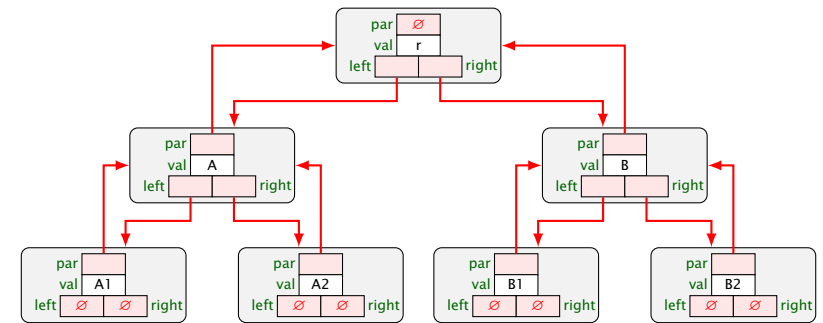
**Nachteil:** nur Navigation nach unten möglich.



## Darstellung von Bäumen: doppelt verkettet



## Darstellung von Binärbäumen



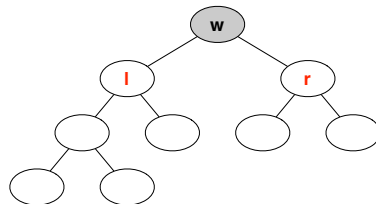
Bei Binärbäumen hat man üblicherweise für beide Nachfolger eine explizite Referenz.

## Traversierung von Binärbäumen

Sei  $G = (V, E)$  Binärbaum.

In **welcher Reihenfolge** durchläuft man  $G$ ?

- ▶ **Wurzel** zuerst
- ▶ danach linker oder rechter Kind-Knoten  $l$  bzw.  $r$ ?
- ▶ falls  $l$ : danach Kindknoten von  $l$  oder zuerst  $r$ ?
- ▶ falls  $r$ : danach Kindknoten von  $r$  oder zuerst  $l$ ?



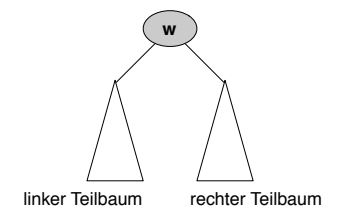
- ⇒ falls zuerst in die Tiefe: **Depth-first search** (DFS)
- ⇒ falls zuerst in die Breite: **Breadth-first search** (BFS)

## DFS Binärbaum

Sei  $G = (V, E)$  Binärbaum.

**Tiefensuche** (Depth-first search, DFS) gibt es in 3 Varianten:

1. **Pre-order** Reihenfolge
  - ▶ besuche Wurzel
  - ▶ durchlaufe linken Teilbaum
  - ▶ durchlaufe rechten Teilbaum
2. **In-order** Reihenfolge
  - ▶ durchlaufe linken Teilbaum
  - ▶ besuche Wurzel
  - ▶ durchlaufe rechten Teilbaum
3. **Post-order** Reihenfolge
  - ▶ durchlaufe linken Teilbaum
  - ▶ durchlaufe rechten Teilbaum
  - ▶ besuche Wurzel



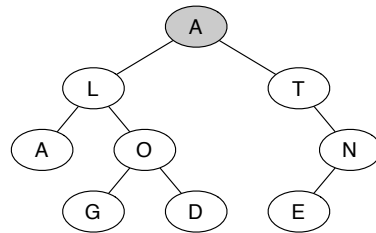
## Pre-order Traversierung

**Pre-order** Reihenfolge:

- ▶ besuche Wurzel
- ▶ durchlaufe linken Teilbaum
- ▶ durchlaufe rechten Teilbaum

**Beispiel:**

A, L, A, O, G, D, T, N, E



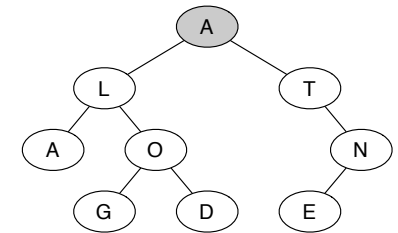
## In-order Traversierung

**Inorder** Reihenfolge:

- ▶ durchlaufe linken Teilbaum
- ▶ besuche Wurzel
- ▶ durchlaufe rechten Teilbaum

**Beispiel:**

A, L, G, O, D, A, T, E, N



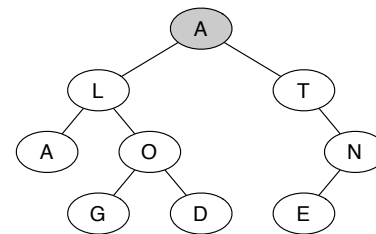
## Post-order Traversierung

**Postorder** Reihenfolge:

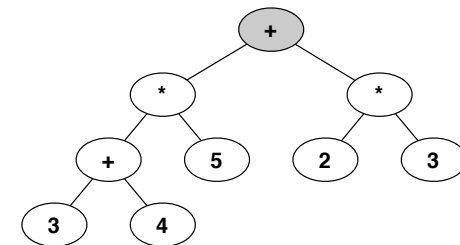
- ▶ durchlaufe linken Teilbaum
- ▶ durchlaufe rechten Teilbaum
- ▶ besuche Wurzel

**Beispiel:**

A, G, D, O, L, E, N, T, A



## Beispiel: Arithmetischer Term

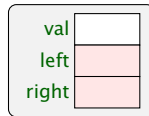


Traversierung:

- ▶ **Pre-order:** + \* + 3 4 5 \* 2 3
- ▶ **In-order:** 3 + 4 \* 5 + 2 \* 3
- ▶ **Post-order:** 3 4 + 5 \* 2 3 \* +

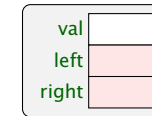
## Implementierung DFS

```
1 preorder(TreeNode* v)
2   if (v == NULL)
3     return
4   print(v->val);
5   preorder(v->left);
6   preorder(v->right);
```



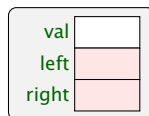
## Implementierung DFS

```
1 inorder(TreeNode* v)
2   if (v == NULL)
3     return
4   preorder(v->left);
5   print(v->val);
6   preorder(v->right);
```



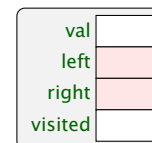
## Implementierung DFS

```
1 postorder(TreeNode* v)
2   if (v == NULL)
3     return
4   postorder(v->left);
5   postorder(v->right);
6   print(v->val);
```



## Implementierung DFS mit Stack

```
1 postorder(TreeNode* v)
2   stack.push(v);
3   while (!stack.empty())
4     v = stack.top();
5     if (v->left && !v->left->visited)
6       stack.push(v->left);
7     else if (v->right && !v->right->visited)
8       stack.push(v->right);
9     else
10      print(v->val);
11      v->visited = true;
12      stack.pop();
```



## Implementierung DFS ohne Stack

```
1 postorder(TreeNode* v)
2     TreeNode* k = v;
3     while (true)
4         if (k->left && !k->left->visited)
5             k = k->left;
6         else if (k->right && !k->right->visited)
7             k = k->right;
8         else
9             print(k->val);
10            k->visited = true;
11            if (k == v) break;
12            else k = k->parent;
```

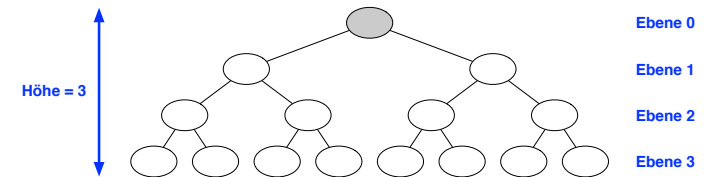
|         |  |
|---------|--|
| parent  |  |
| val     |  |
| left    |  |
| right   |  |
| visited |  |

## BFS Binärbaum

Sei  $G = (V, E)$  Binärbaum.

**Breitensuche** (Breadth-first search, BFS):

- ▶ besuche Wurzel
- ▶ für alle Ebenen von 1 bis Höhe
  - ▶ besuche alle Knoten aktueller Ebene



## Implementierung BFS Traversierung

```
1 bfs(TreeNode* v)
2     queue.enqueue(v);
3     while (!queue.empty())
4         v = queue.dequeue();
5         print(v.val);
6         if (v->left)
7             queue.enqueue(v->left);
8         if (v->right)
9             queue.enqueue(v->right);
```

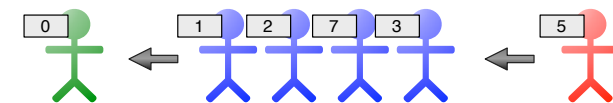
|       |  |
|-------|--|
| val   |  |
| left  |  |
| right |  |

## Definition Priority Queue

### Definition Priority Queue

Eine **Priority Queue** ist ein abstrakter Datentyp. Sie beschreibt einen **Queue-artigen** Datentyp für eine Menge von Elementen mit **zugeordnetem Schlüssel** und unterstützt die Operationen

- ▶ **Einfügen** von Element mit Schlüssel in die Queue,
- ▶ **Entfernen** von Element mit **minimalem Schlüssel** aus der Queue,
- ▶ **Ansehen** des Elementes mit **minimalem Schlüssel** in der Queue.



- ▶ entsprechend gibt es auch eine Priority Queue mit Entfernen/Ansehen von Element mit **maximalem Schlüssel**

## Definition Priority Queue (abstrakter)

Priority Queue  $P$  ist ein abstrakter Datentyp mit Operationen

- ▶ **insert( $P, x$ )** wobei  $x$  ein Element
- ▶ **extractMin( $P$ )** liefert ein Element
- ▶ **minimum( $P$ )** liefert ein Element
- ▶ **isEmpty( $P$ )** liefert `true` or `false`
- ▶ **initialize** liefert eine Priority Queue Instanz

und mit Bedingungen

- ▶ **isEmpty(initialize()) == true**
- ▶ **isEmpty(insert( $P, x$ )) == false**
- ▶ **minimum(initialize())** ist nicht erlaubt (Fehler)
- ▶ **extractMin(initialize())** ist nicht erlaubt (Fehler)

(Fortsetzung nächste Folie)

## Definition Priority Queue (abstrakter)

Fortsetzung Bedingungen Priority Queue  $P$ :

- ▶ **minimum(insert( $P, x$ ))** liefert zurück
  - ▶ falls  $P == \text{initialize}()$ , dann  $x$
  - ▶ sonst:  $\min(x, \text{minimum}(P))$
- ▶ **extractMin(insert( $P, x$ ))**
  - ▶ falls  $x == \text{minimum}(\text{insert}(P, x))$ , dann liefert es  $x$  zurück und hinterlässt  $P$  im Originalzustand
  - ▶ sonst liefert es  $\text{extractMin}(P)$  zurück und hinterlässt  $P$  im Zustand  $\text{insert}(\text{extractMin}(P), x)$

(entsprechend für die Priority Queue mit maximalem Schlüssel)

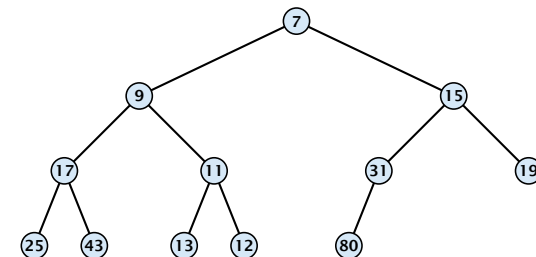
## Definition Priority Queue

Eine **adressierbare Priority Queue** unterstützt zusätzlich:

- ▶ **handle insert( $P, x$ ):**  
Fügt  $x$ ; gibt ein **handle** zurück mit dem man später noch auf das Objekt zugreifen kann.
- ▶ **delete( $P, h$ ):**  
Entfernt, das durch handle  $h$  referenzierte Objekt.
- ▶ **decrease-key( $P, h, k$ ):**  
Ändert den Schlüssel des Objektes, das durch  $h$  referenziert wird auf  $k$ . Erfordert  $k < h$ .

## 7.3 Priority Queues

- ▶ **Idee:** Speichere Elemente in einem fast vollständigen Binärbaum.
- ▶ **Heapeigenschaft:** Der Schlüssel eines Elements ist nicht größer als der Schlüssel eines Kindes.



## Binäre Heaps

### Operationen:

- ▶ **minimum()**: gib Wurzelement zurück. Zeit  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ **isEmpty()**: überprüfe ob Zeiger auf Wurzel **NULL** ist. Zeit  $\mathcal{O}(1)$ .

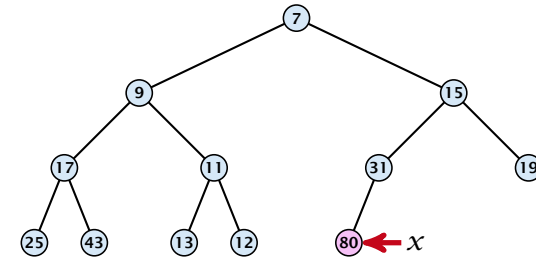
## 7.3 Priority Queues

Verwalte Zeiger auf **letztes Element  $x$** .

- ▶ Berechne Vorgänger von  $x$  (letztes Element wenn  $x$  gelöscht wird) in Zeit  $\mathcal{O}(\log n)$ .

gehe aufwärts; stoppe nach der ersten Benutzung einer rechten Kante; gehe links; gehe rechts bis zu einem Blatt.

wenn man im aufwärts-Teil auf die Wurzel trifft nimmt man danach nur noch rechte Kanten.



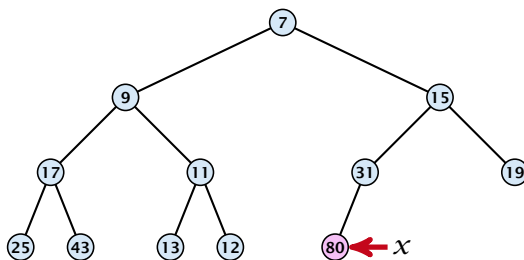
## 7.3 Priority Queues

Verwalte Zeiger auf **letztes Element  $x$** .

- ▶ Wir können Nachfolger von  $x$  (letztes Element wenn ein Element eingefügt wird) in Zeit  $\mathcal{O}(\log n)$  berechnen.

gehe aufwärts; stoppe nach Benutzung einer linken Kante; gehe rechts; nimm linke Kanten.

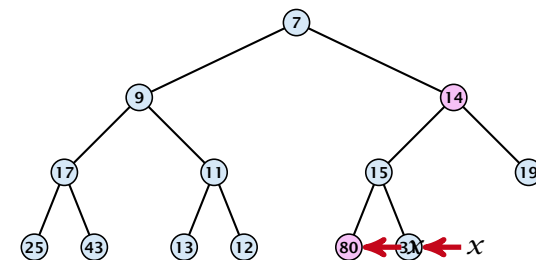
falls man im aufwärts-Teil auf die Wurzel trifft nimmt man danach nur noch linke Kanten.



Eigentlich wird hier nicht der Nachfolger berechnet sondern die Stelle an der man ein Element einfügen würde. Der Abwärtsteil endet an einem **NULL**-pointer, d.h. man möchte eine linke oder rechte Kante nehmen, aber das dazugehörige Kind existiert nicht. An dieser Stelle würde man ein Element einfügen.

## Einfügen

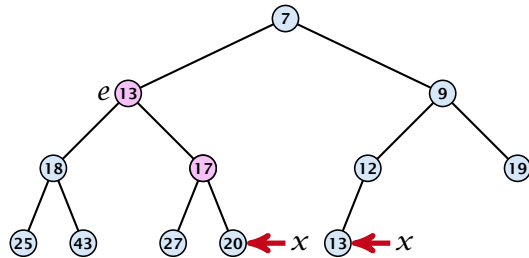
1. Füge Element am Nachfolger von  $x$  ein.
2. Tausche Element mit Elternknoten bis die **Heapeigenschaft** erfüllt ist.



Swaps können durch Pointermanipulation oder Datenaustausch realisiert werden. Die erste Variante ergibt eine adressierbare Priority Queue.

## Löschen

1. Vertausche zu löschendes Element mit dem **letzten Element**  $e$ .
2. Stelle die Heapeigenschaft für Element  $e$  wieder her.



An der neuen Position wandert  $e$  entweder auf **oder** abwärts (aber nicht beides).

## Binäre Heaps

### Operationen:

- ▶ **minimum()**: Gib Wurzelement zurück. Zeit  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ **isEmpty()**: Überprüfe ob Wurzelzeiger **NULL**. Zeit  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ **insert( $k$ )**: füge bei Nachfolger von  $x$  ein. **bubble up**. Zeit  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- ▶ **delete( $h$ )**: tausche mit  $x$ ; **bubble up or sift-down**. Zeit  $\mathcal{O}(\log n)$ .

## Binäre Heaps

```
1 void bubbleUp(TreeNode* v) {  
2     while (v->parent && v->parent->val > v->val)  
3         swap(v,v->parent);  
4 }
```

Vertausche mit Elternknoten solange dein Wert kleiner als Wert des Elternknotens.

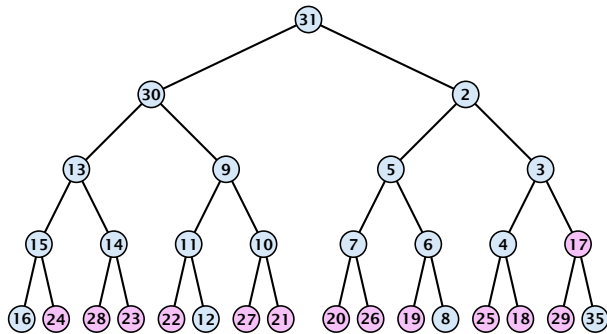
## Binäre Heaps

```
1 void siftDown(TreeNode* v) {  
2     TreeNode* m = NULL;  
3     while (true) {  
4         int minValue = v->val;  
5         if (v->left && minValue > v->left->val) {  
6             minValue = v->left->val;  
7             m = v->left;  
8         }  
9         if (v->right && minValue > v->right->val) {  
10            minValue = v->right->val;  
11            m = v->right;  
12        }  
13        if (v->val != minValue)  
14            swap(v,m);  
15        else break;  
16    }  
17 }
```

Vertausche mit dem kleineren der Kinder, solange der Wert kleiner als dein eigener ist.

## Build Heap

Wir können einen Heap in Linearzeit erzeugen:



$$\sum_{\text{levels } \ell} 2^\ell \cdot (h - \ell) = \sum_i i 2^{h-i} = \mathcal{O}(2^h) = \mathcal{O}(n)$$

Die Analyse auf der vorherigen Folie betrachtet nur die Kosten für die sift-down Operationen.

1. Wie bekommt man alle Schlüssel in eine Baumstruktur?
  2. Wie realisiert man die Reihenfolge der sift-down Operationen?
2. kann mit Hilfe einer BFS-Suche realisiert werden; man startet eine BFS und verkettet die Baumknoten gemäß der Reihenfolge.

Auch 1. kann man durch eine BFS-artige Generierung des Baumes erreichen.

```
1 insertCompleteBinary(A, n)
2   Queue q;
3   q.enqueue(&root);
4   for (i=0; i<n; i++)
5       TreeNode* n = new TreeNode(A[i]);
6       TreeNode** t = q.dequeue();
7       n->parent = *t;
8       q.enqueue(&(n->left));
9       q.enqueue(&(n->right));
```

## Binäre Heaps

Operationen:

- ▶ **minimum()**: Gib Wurzelement zurück. Zeit  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ **isEmpty()**: Überprüfe ob Wurzelzeiger NULL. Zeit  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ **insert(k)**: füge bei Nachfolger von  $x$  ein. **bubble up**. Zeit  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- ▶ **delete(h)**: tausche mit  $x$ ; **bubble up or sift-down**. Zeit  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- ▶ **build( $x_1, \dots, x_n$ )**: Füge Elemente beliebig ein; führe **sift-down**-Operationen durch; starte mit den untersten Leveln. Zeit  $\mathcal{O}(n)$ .



## Binäre Heaps

Die Standardimplementierung eines Binärheaps speichert den Binärbaum in einem Array Sei  $A[0, \dots, n-1]$  das Array

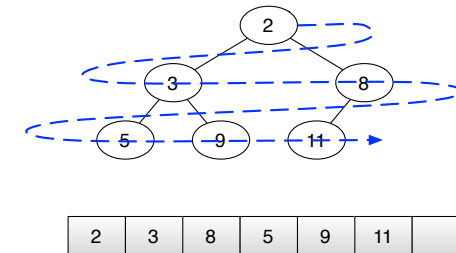
- ▶ Das Elternelement des  $i$ -ten Elementes findet man an Position  $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ .
- ▶ Das linke Kind findet man an Position  $2i+1$ .
- ▶ Das rechte Kind an  $2i+2$ .

Den Nachfolger von  $x$  zu finden ist viel einfacher als auf den vorherigen Folien.  $x$  wird einfach um eins erhöht.

Die resultierende Warteschlange ist nicht **adressierbar**. Die Elemente behalten ihre Position nicht und deshalb gibt es keine stabilen Handles.

## Binärbaum als Array

- ▶ vollständiger Binärbaum Höhe  $k$  hat  $2^{k+1} - 1$  Knoten  
⇒ speichere Knoten von oben nach unten, von links nach rechts in Array  
⇒ maximale Größe des Arrays:  $2^{k+1} - 1$
- ▶ Beispiel fast vollständiger Binärbaum:



## Binärbaum als Array

Wurzel an Position 0.

Knoten an Position  $i$ :

- ▶ Elternknoten an Position  $\lfloor (i-1)/2 \rfloor$
- ▶ linkes Kind an Position  $2i+1$ ;
- ▶ rechtes Kind an Position  $2i+2$

