Algorithmenentwurf

Kein Patentrezept zum Entwurf von Algorithmen!

- insbesondere Ableitung von Algorithmus aus Spezifikation nicht automatisierbar

Programmieren ist **kreative** Tätigkeit

- “The Art of Computer Programming” (D. Knuth)

Unterstützung durch Algorithmenmuster

- auch **Design Patterns** genannt
- “best practice”

Divide and Conquer

Definition: Divide and Conquer
Divide and Conquer ist die rekursive Rückführung eines zu lösenden Problems auf mehrere identische Problem mit kleinerer Eingabemenge.

Divide and Conquer: zu deutsch “Teile und herrsche”

Prinzip:

- teile große Aufgabe in mehrere kleine Teilaufgaben
- rufe denselben Algorithmus rekursiv auf den Teilaufgaben auf

Divide and Conquer

1. **Teile** gegebene Aufgabe in mehrere getrennte Teilaufgaben
   - **löse** Teilaufgaben einzeln
   - **setze** Lösung der Gesamtaufgabe aus Teillösungen zusammen

2. Wende dieselbe Technik auf jede Teilaufgabe an, dann auf deren Teilaufgaben etc., bis die Teilaufgabe so klein ist, dass Lösung explizit berechnet werden kann

3. Jede Teilaufgabe sollte von derselben Art sein wie die Gesamtaufgabe, so dass der gleiche Algorithmus rekursiv aufgerufen werden kann

Divide and Conquer

```
Input: Aufgabe A

DivideAndConquer(A)
    if (A klein)
        loese A explizit;
    else
        teile A in Teilaufgaben A1,...,An;
        DivideAndConquer(A1)
        ...
        DivideAndConquer(An)
        berechne Loesung fuer A aus Lsgn fuer A1,...,An
```

Divide and Conquer

- Berechnung der Fibonacii-Zahlen (untypisch, da Teilprobleme Größe $n-$ und $n-2$ haben).
- Binäre Suche (nur ein Teilproblem der Größe $\leq n/2$).
- Karatsuba für die Multiplikation großer Zahlen.
- MergeSort
- QuickSort
- Fast Fourier Transformation (FFT)
- Medianberechnung
- ...

Mergesort – Sortieren durch Mischen

Mergesort ist ein schneller Sortieralgorithmus der nach dem Divide and Conquer Prinzip arbeitet

John von Neumann (1945)

Divide and Conquer: MergeSort

Sei L verkette Liste mit n natürlichen Zahlen $a_i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: sortiere L in aufsteigender Reihenfolge.

Lösung mit Divide and Conquer-Muster: **MergeSort**

Idee:

- **Divide:** teile L auf in zwei gleich große Teillisten
- **Rekursion:** rufe MergeSort rekursiv für die zwei Teillisten auf
- **Conquer:** setze die Teillisten zusammen (**merge** bzw. mischen)

Wann ist Teilliste **"klein"**, d.h. wann löst man explizit?
$\rightarrow$ Teilliste mit nur **einem** Element $\rightarrow$ sortiert!

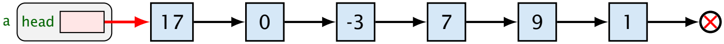
Divide and Conquer: MergeSort

```
List* mergeSort(List* a) {
    // returns a list with elements from a sorted
    // may delete the list pointed to by a
    if (a->length() <= 1) return a;
    List* b = a->half();
    a = mergeSort(a);
    b = mergeSort(b);
    return merge(a,b);
}
```

Divide and Conquer: MergeSort

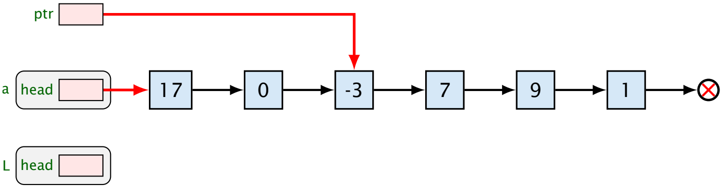
```
List* half() {
    // removes elements from second half of list
    // and returns these as a new list
    Node* ptr = head;
    for (int i=0; i<length()/2-1; i++)
        ptr = ptr->next;
    List* L = new List(ptr->next);
    ptr->next = NULL;
    return L;
}
```

Beispiel – Halbieren

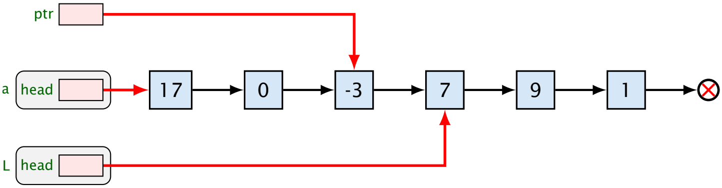


`a.half()`

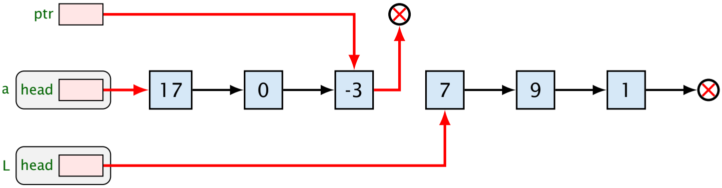
Beispiel – Halbieren



Beispiel – Halbieren

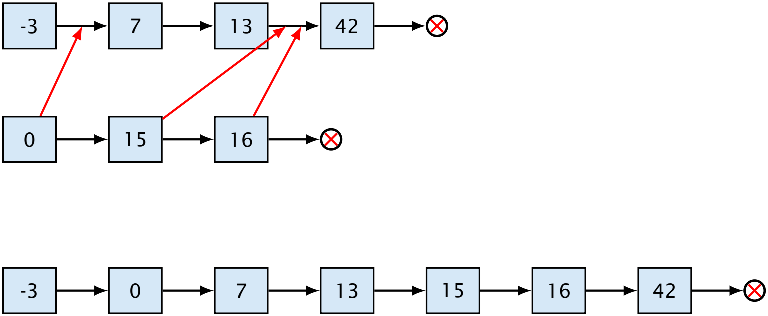


Beispiel – Halbieren

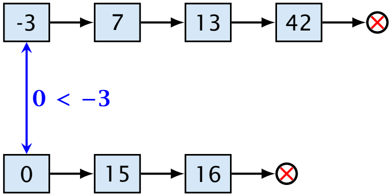


Beispiel – Mischen

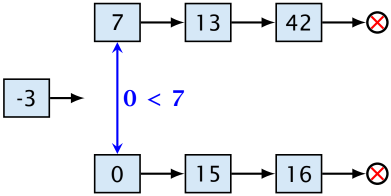
Hier benutzen wir das Symbol ⊗ für das `null`-Objekt.



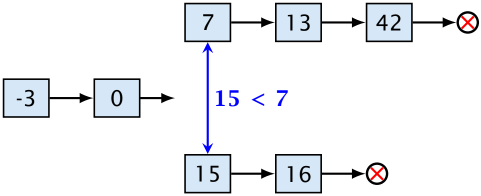
Beispiel – Mischen



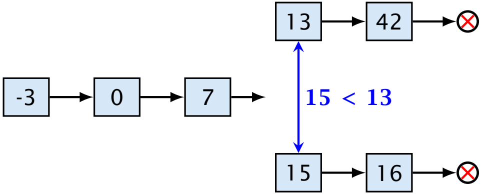
Beispiel – Mischen



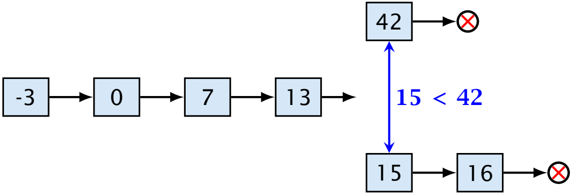
Beispiel – Mischen



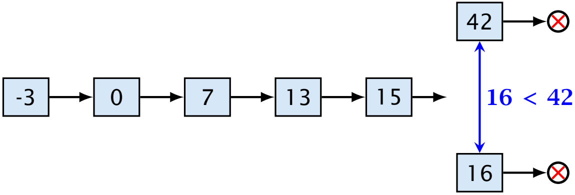
Beispiel – Mischen



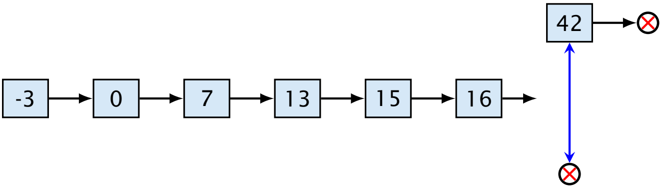
Beispiel – Mischen



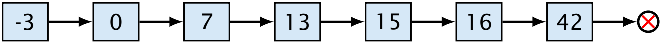
Beispiel – Mischen



Beispiel – Mischen



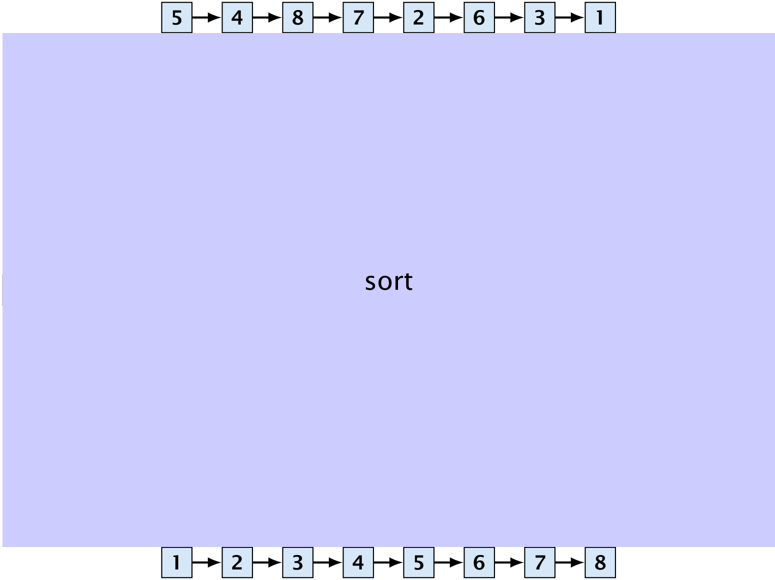
Beispiel – Mischen



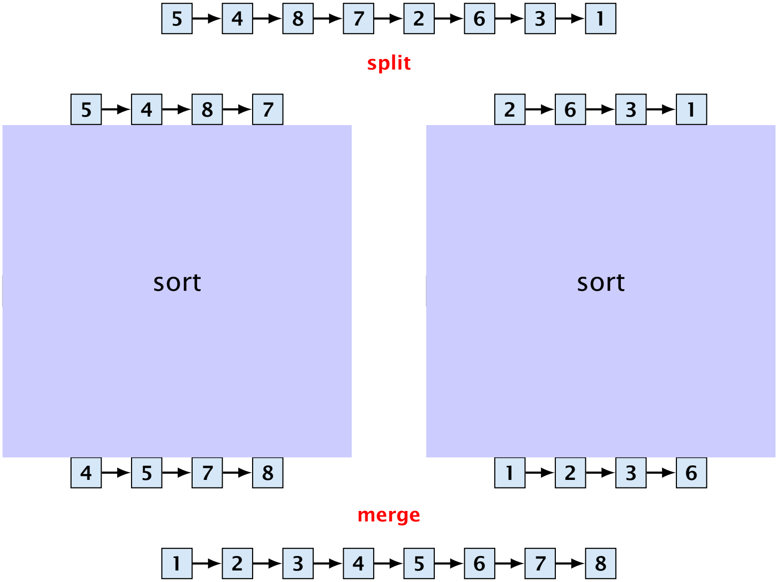
Divide and Conquer: MergeSort

```
List* merge(List* a, List* b) {
    // returns a list with elements from a and b
    // the lists a and b may be deleted
    if (a->empty()) { delete a; return b; }
    if (b->empty()) { delete b; return a; }
    List* h;
    if (a->elementAt(0) < b->elementAt(0))
        h = a;
    else
        h = b;
    // remove element from h and recurse
    int d = h->removeFront();
    List* L = merge(a,b);
    L->insertFront(d);
    return L;
}
```

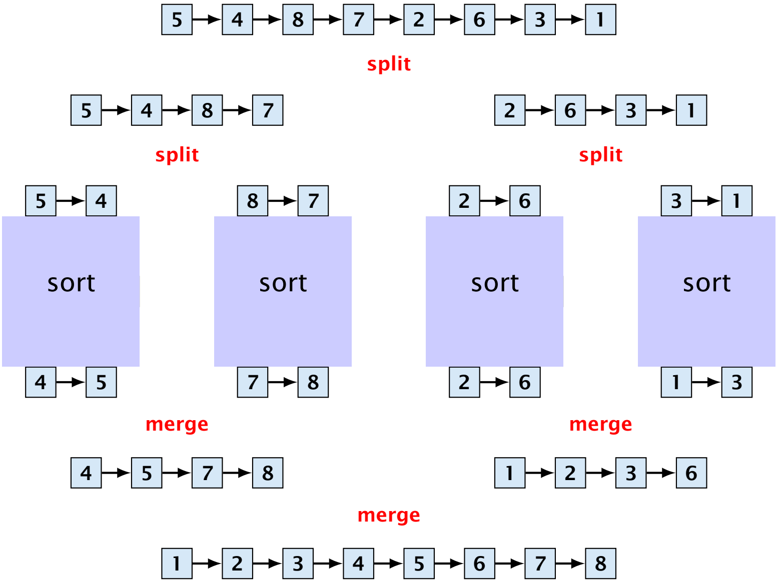
Mergesort



Mergesort

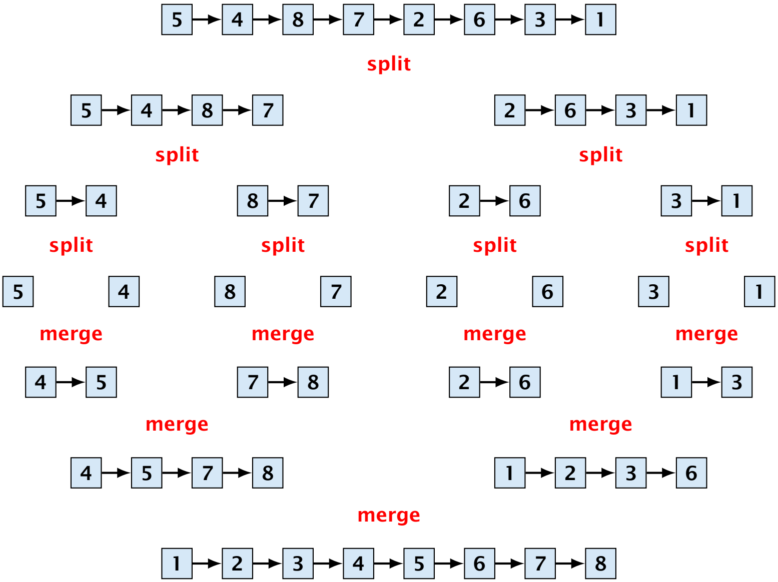

5 4 8 7 2 6 3 1
split
5 4 8 7
2 6 3 1
sort
sort
4 5 7 8
1 2 3 6
merge
1 2 3 4 5 6 7 8

Mergesort



5 4 8 7 2 6 3 1
split
5 4 8 7
2 6 3 1
split
split
5 4
8 7
2 6
3 1
sort
sort
sort
sort
4 5
7 8
2 6
1 3
merge
merge
4 5 7 8
1 2 3 6
merge
1 2 3 4 5 6 7 8

Mergesort


5 4 8 7 2 6 3 1
split
5 4 8 7
2 6 3 1
split
split
5 4
8 7
2 6
3 1
split
split
split
split
5
4
8
7
2
6
3
1
merge
merge
merge
merge
4 5
7 8
2 6
1 3
merge
merge
4 5 7 8
1 2 3 6
merge
1 2 3 4 5 6 7 8

MergeSort

Eigenschaften

- Merge Sort benötigt zusätzlichen Speicher in Funktion `merge`; insgesamt n zusätzliche Elemente falls A Länge n
- best und worst case sind identisch
- die meiste Arbeit steckt in **merge**; ein Aufruf von merge auf zwei Listen der Länge $n/2$ Kosten Zeit $\mathcal{O}(n)$.

MergeSort

Rekurrenzgleichung:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) \ .$$

Laufzeit: $\mathcal{O}(n \log n)$

Sortieralgorithmen Zusammenfassung

Insertion Sort

- in-place
- Komplexität $\mathcal{O}(n^2)$, best case: $\mathcal{O}(n)$
- Komplexität $\mathcal{O}(hn)$ falls jedes Element nur h Positionen von Zielposition entfernt

MergeSort

- benötigt zusätzlichen Speicher
- Komplexität $\mathcal{O}(n \log n)$

QuickSort

- in-place
- Komplexität im Mittel $\mathcal{O}(n \log n)$, worst case: $\mathcal{O}(n^2)$

Algorithmenmuster: Greedy

greedy = “gierig”, “gefräßig”

Greedy Prinzip:

- Lösung eines Problems durch schrittweise Erweiterung der Lösung ausgehend von Startlösung
- in jedem Schritt wähle den bestmöglichen Schritt (ohne Berücksichtigung zukünftiger Schritte) ⇒ **greedy**

gefundene Lösung muss nicht immer optimal sein!

Algorithmenmuster: Greedy

```
Input: Aufgabe A

Greedy(A)
    S = {}; // Loesung
    while (S keine Loesung)
        waehle bestmoeglichen Erweiterungschritt s
        erweitere S mit s
```

Greedy: Beispiel Wechselgeld I

Problem: Herausgabe von Wechselgeld

- **Voraussetzung:** übliche Euro-Münzen 2€, 1€, 50ct, 20ct, 10ct, 5ct, 2ct und 1ct
- **Aufgabe:** Wechselgeld-Herausgabe mit möglichst wenig Münzen

Beispiel: Preis €1.11, bezahlt mit 2€-Münze. Wechselgeld: 89ct

Minimum Anzahl Münzen: 6

$$89\text{ct} = 50\text{ct} + 20\text{ct} + 10\text{ct} + 5\text{ct} + 2\text{ct} + 2\text{ct}$$

Greedy: Beispiel Wechselgeld II

```
Input: Betrag b

Wechselgeld(b)
    printf("%d = ",b);
    count = 0;
    while (count < b)
        // make greedy choice
        waehle groesste Muenze s mit count + s <= b
        printf("%d ",s);
        count += s;
```

Achtung: Abhängig vom Geldsystem liefert dieser Algorithmus nicht immer optimale Lösung!

- **Beispiel:** Münzen: 5ct, 4ct, 1ct.   **Betrag:** 8ct
- **Greedy-Lösung:** 8ct = 5ct + 1ct + 1ct + 1ct
- **Optimale Lösung:** 8ct = 4ct + 4ct

Von Greedy lösbare Probleme

Voraussetzungen für Anwendbarkeit von Greedy:

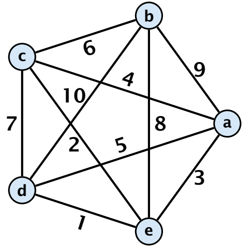
- Lösungen lassen sich schrittweise durch Hinzufügen von Elementen aufbauen, beginnend bei leerer Lösung
- Bewertungsfunktion für partielle und vollständige Lösung
- Gesucht wird eine/die optimale Lösung

Anwendung Greedy: Glasfasernetz

Problemstellung: Aufbau von möglichst billigem Glasfasernetz zwischen n Knoten $K_1, \ldots, K_n$, so dass alle Knoten miteinander verbunden sind (u.U. mit Umweg)

Input:

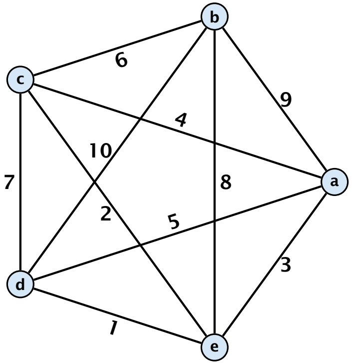
- Knoten $a, b, c, \ldots$
- Kosten $d_{ij} > 0$ für direkte Verbindung zwischen i und j für $i \neq j$.



Output: Teilmenge aller Verbindungen, so dass

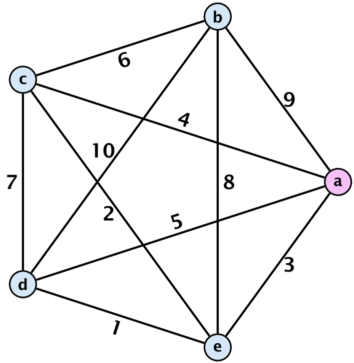
- alle Knoten verbunden sowie
- minimale Kosten

Beispiel: Glasfasernetz



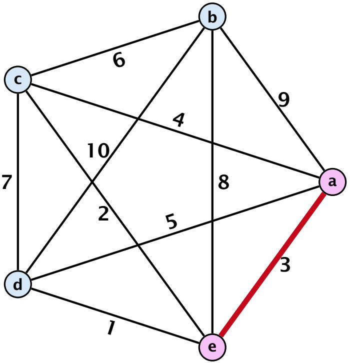
- Knoten a, b, c, d, e
- Kosten d_{ij}
- repräsentiert als gewichteter, ungerichteter Graph

Beispiel: Glasfasernetz



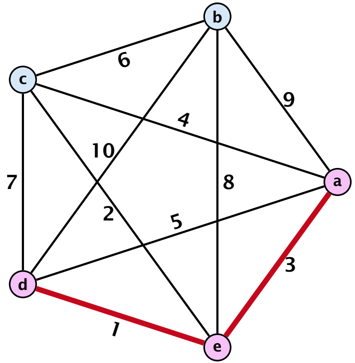
- Startknoten a
- beste Verbindung aus $\{a\}$ führt zu e (Kosten 3)

Beispiel: Glasfasernetz



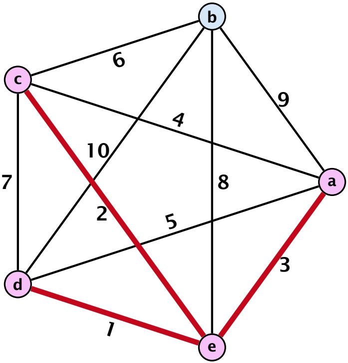
- Menge $\{a, e\}$
- beste Verbindung aus $\{a, e\}$ führt zu d (Kosten 1)

Beispiel: Glasfasernetz



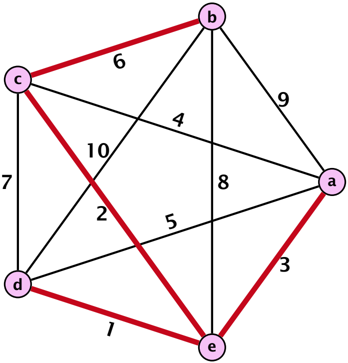
- Menge $\{a, d, e\}$
- beste Verbindung aus $\{a, d, e\}$ führt zu c (Kosten 2)

Beispiel: Glasfasernetz



- Menge $\{a, c, d, e\}$
- beste Verbindung aus $\{a, c, d, e\}$ führt zu b (Kosten 6)

Beispiel: Glasfasernetz



- alle Knoten verbunden
- Algorithmus fertig

Ergebnis: ein sog. minimaler Spannbaum (minimum spanning tree) des Graphen

Glasfasernetz: Algorithmus

```
Input:  Array K von n Knoten, Kostenfunktion d(i,j)
Output: minimaler Spannbaum B

Glasfasernetz(K, d)
    B = K[1];
    while (B nicht Spannbaum)
        suche billigste Kante aus B;
        fuege Kante und Knoten zu B hinzu;
```

Komplexität naiver Implementation: $O(n^3)$

⇒ geht besser, (später in der Vorlesung)

Algorithmenmuster: Brute Force

Brute Force:

- erzeuge all in Frage kommenden Lösungskandidaten
- überprüfe für jeden Kandidaten ob es eine zulässige Lösung ist
- ggfs. (bei Optimierungsproblemen) bestimme zulässige Lösung mit minimalen Kosten/maximalem Profit

Eigenschaften:

- sehr einfach zu implementieren
- häufig sehr schlechte Laufzeit

Ein Programmierer sollte wissen ob man ein Problem via Brute-Force lösen kann, oder ob die Laufzeit dafür zu schlecht ist.

Algorithmenmuster: Brute Force

```
Input:  Problem P
Output: zulaessige Loesung fuer P

BruteForce(P)
    S = first(P)
    while (S != NULL)
        if (S valid for P)
            return S
        S = next(P)
```

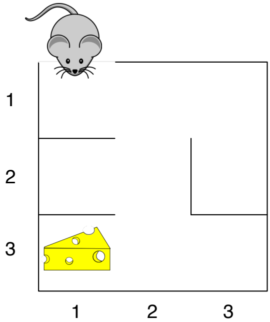
Algorithmenmuster: Backtracking

Backtracking: systematische Suchtechnik, um vorgegebenen Lösungsraum vollständig abzuarbeiten

Algorithmenmuster: Backtracking

Backtracking: systematische Suchtechnik, um vorgegebenen Lösungsraum vollständig abzuarbeiten

Paradebeispiel: Labyrinth. Wie findet Maus den Käse?

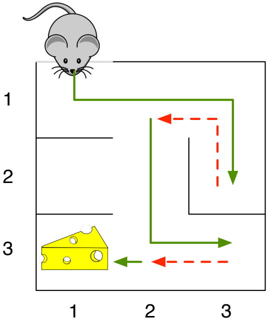


Backtracking: Labyrinth I

Problem: Wie findet Maus den Käse?

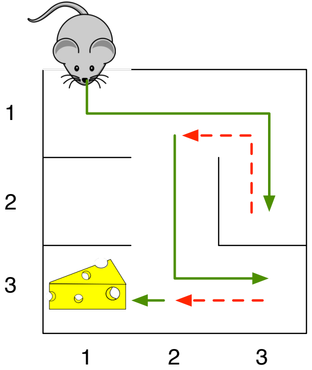
Lösung:

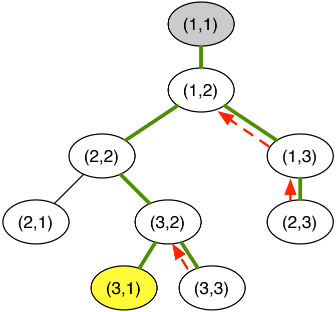
- systematisches Abgehen des Labyrinths
- Zurückgehen falls Sackgasse (daher: **Backtracking**)
  $\Rightarrow$ “trial and error”



Backtracking: Labyrinth II

Mögliche Wege repräsentiert als **Baum**:





Algorithmenmuster: Backtracking

Voraussetzungen:

- Lösungs(teil)raum repräsentiert als **Konfiguration** K
- K_0 ist Startkonfiguration
- jede Konfiguration K_i kann **direkt erweitert** werden
- für jede Konfiguration ist entscheidbar, ob Lösung

```
Input: Konfiguration K

Backtrack(K)
    if (K Loesung)
        gib K aus;
    else
        foreach (Erweiterung K' von K)
            Backtrack(K')
```

Algorithmenmuster: Backtracking

Voraussetzungen:

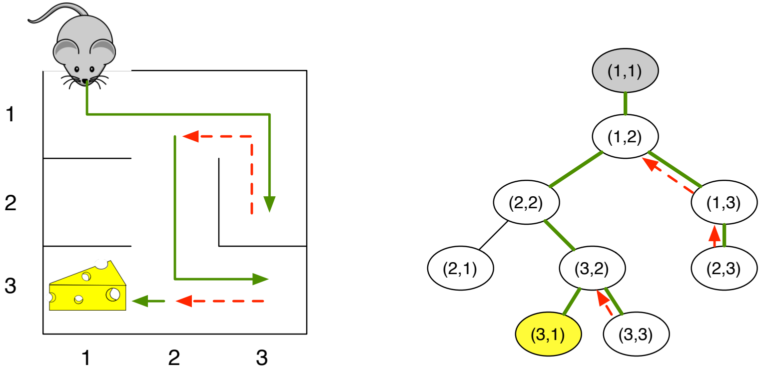
- Lösungs(teil)raum repräsentiert als **Konfiguration** K
- K_0 ist Startkonfiguration
- jede Konfiguration K_i kann **direkt erweitert** werden
- für jede Konfiguration ist entscheidbar, ob Lösung

```
Input: Konfiguration K

Backtrack(K)
    if (K Loesung)
        gib K aus;
    else
        foreach (Erweiterung K' von K)
            Backtrack(K')
```

⇒ initialer Aufruf mittels Backtrack(K_0)

Backtracking: Konfigurationen



Konfiguration z.B. repräsentiert als **Pfad** im Baum

Backtracking: Eigenschaften

Terminierung von Backtracking:

- nur wenn Lösungsraum **endlich**
- nur wenn sichergestellt dass Konfigurationen **nicht wiederholt getestet** werden

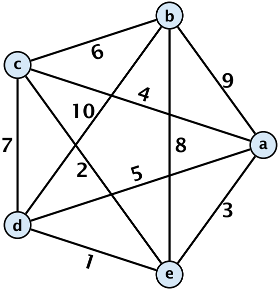
Komplexität von Backtracking:

- direkt abhängig von Größe des Lösungsraums
- meist **exponentiell**, also $O(2^n)$, oder schlimmer!
- nur für kleine Probleme wirklich anwendbar

Backtracking Beispiel: Traveling Salesman

Traveling Salesman Problem:

- n Städte
- finde kürzeste Rundreise, die alle Städte exakt einmal besucht (ausser Start- und Zielort (identisch))



$\Rightarrow$ Lösung z.B. mit Algorithmenmuster Backtracking

Traveling Salesman Problem: Algorithmus mit Backtracking

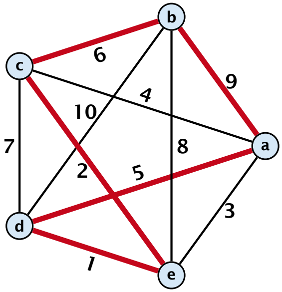
```
Input: n Staedte, Rundreise trip

TSP(trip)
    if (trip besucht jede Stadt)
        erweitere trip um Reise zum Standort;
        gebe trip und Kosten aus;
    else
        foreach (bislang unbesuchte Stadt s)
            trip' = trip erweitert um s
            TSP(trip');
```

Traveling Salesman Problem: Beispiel

Bei n Städten mit fixiertem Start-/Zielort gibt es $(n-1)!$ Rundreisen (hier: 5 Städte $\Rightarrow 4! = 24$ Rundreisen).

Laufzeit von **TSP** hier ist $\mathcal{O}((n-1)!)$



hier: kürzeste Rundreise hat Länge 23

- z.B. über Route $a \to b \to c \to e \to d \to a$

Backtracking Beispiel: Acht-Damen-Problem

Acht-Damen-Problem:

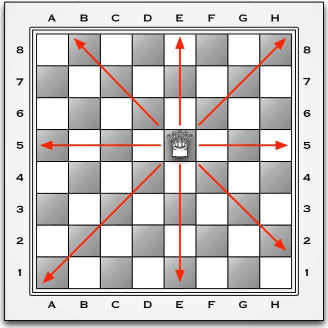
- suche alle Konfigurationen von 8 Damen auf Schachbrett
- so dass keine Dame eine andere bedroht

Backtracking Beispiel: Acht-Damen-Problem

Acht-Damen-Problem:

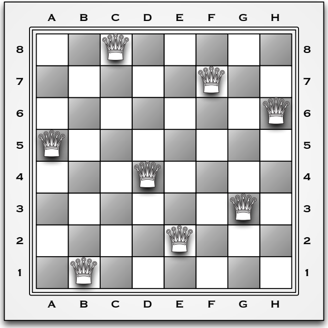
- suche alle Konfigurationen von 8 Damen auf Schachbrett
- so dass keine Dame eine andere bedroht

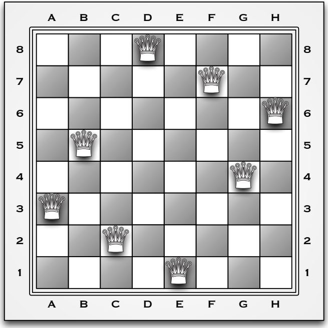
Dame auf Schachbrett:



Acht-Damen-Problem

Zwei der möglichen Lösungen:





Beobachtung: jeweils nur eine Dame pro Zeile/Spalte

→ Lösung z.B. mit Algorithmenmuster Backtracking

Acht-Damen-Problem: Algorithmus mit Backtracking

```
Input: Zeilenindex i

AchtDamen(i)
    if (i == 9)
        gib Loesung aus;
        return;
    for h=1 to 8
        if (Feld in Zeile i, Spalte h nicht bedroht)
            setze Dame auf Feld (i,h);
            AchtDamen(i+1);
            entferne Dame von Feld (i,h);
```

Acht-Damen-Problem

- es gibt **92 Lösungen** für das Acht-Damen-Problem
- das Problem lässt sich auf n Damen auf einem $n \times n$ Schachbrett ausweiten
  - Anzahl Lösungen wächst stark
  - z.B. für $n = 13$ gibt es 73712 Lösungen
- ähnliche Spiele, wie z.B. **Sudoku**, lassen sich entsprechend lösen

Dynamisches Programmieren

Dynamisches Programmieren

- einsetzbar für Probleme, deren optimale Lösung sich aus optimalen Lösungen von Teilproblemen zusammensetzt (z.B. Rekursion)

Prinzip:

- statt Rekursion berechnet man vom kleinsten Teilproblem "aufwärts"
- Zwischenergebnisse werden in **Tabellen** gespeichert

Beispiel: Fibonacci Zahlen

Fibonacci Folge

Die Fibonacci Folge ist eine Folge natürlicher Zahlen $f_1, f_2, f_3, \ldots$, für die gilt

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 3$$

mit Anfangswerten $f_1 = 1$, $f_2 = 1$.

- eingesetzt von Leonardo Fibonacci zur Beschreibung von Wachstum einer Kaninchenpopulation
- Folge lautet: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
- berechenbar z.B. via Rekursion

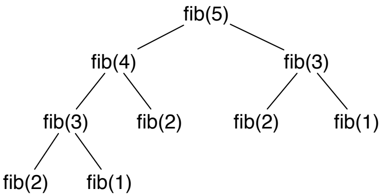
Beispiel: Fibonacci Funktion

```
Input: Index n der Fibonaccifolge
Output: Wert f_n
fib(n)
   if (n == 1 || n == 2) {
      return 1;
   }
   else {
      // rekursiver Aufruf
      return fib(n-1) + fib(n-2);
   }
```

Beispiel: Fibonacci Funktion

```
Input: Index n der Fibonaccifolge
Output: Wert f_n
fib(n)
   if (n == 1 || n == 2) {
      return 1;
   }
   else {
      // rekursiver Aufruf
      return fib(n-1) + fib(n-2);
   }
```

Aufrufstruktur für fib(5):



Fibonacci Funktion: dynamisch programmiert

```
Input:  Index n der Fibonaccifolge
Output: F_n

FibDyn(n)
    fib = new long[n+1];
    fib[1] = 1;
    fib[2] = 1;
    for (k=3; k <= n; k++)
        fib[k] = fib[k-1] + fib[k-2];
    res = fib[n];
    delete fib;
    return fib[n];
```

- Komplexität dynamisch programmiert: $O(n)$