

SS 2019

# Algorithmen und Datenstrukturen

Harald Räche

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2019SS/ad/>

Sommersemester 2019

# Teil I

## Organisatorisches

## Vorlesung

Prof. Harald Räcke (raecke@in.tum.de)  
Lehrstuhl für Algorithmen & Komplexität  
(Prof. Albers)



## Zentralübung

Sebastian Weiß (sebastian13.weiss@tum.de)  
Doktorand am  
Lehrstuhl für Grafik und Visualisierung  
(Prof. Westermann)



# Personen

## Tutoren

Lizichong Li

Lisa Roßgoderer

Rojda Hicsanmaz

Jan Hünemann

Nadia Masmoudi

Islam Benshaban

Aaron Kutzner

Stefan Kammermeier

Martin Zimmermann

Selin Kesler

# Termine

## Vorlesung

Montag, 8:00 - 9:30, Raum 1200

Mittwoch, 15:00 - 16:30, Raum 1200

## Zentralübung

Dienstag, 9:45 - 11:15, Raum 1200

## Terminplan

Bitte Terminplan auf Vorlesungswebseite beachten!

# Termine

## Vorlesung

Montag, 8:00 - 9:30, Raum 1200

Mittwoch, 15:00 - 16:30, Raum 1200

## Zentralübung

Dienstag, 9:45 - 11:15, Raum 1200

## Terminplan

Bitte Terminplan auf Vorlesungswebseite beachten!

# Termine

## Tutorübungen

- 1 Fr 9:45-11:15 0509.EG.999 (0999)
- 2 Fr 9:45-11:15 0504.EG.406 (0406)
- 3 Do 8:00- 9:30 0504.EG.406 (0406)
- 4 Fr 11:30-13:00 0509.EG.999 (0999)
- 5 Di 15:00-16:30 0509.EG.999 (0999)
- 6 Di 15:00-16:30 0103.05.325 (N5325)
- 7 Mi 11:30-13:00 0504.EG.406 (0406)
- 8 Fr 11:30-13:00 0504.EG.406 (0406)
- 9 Do 8:00- 9:30 0103.05.325 (N5325)
- 10 Di 15:00-16:30 0504.EG.406 (0406)

## Moodle

<https://www.moodle.tum.de/course/view.php?id=45840>

- ▶ sämtliche Vorlesungsmaterialien (Folien, Übungsblätter, Übungsklausuren)
- ▶ aktuelle Nachrichten
- ▶ Diskussions-Forum

# Kontakt und Feedback

## Für Fragen:

- ▶ Persönlich
  - ▶ Sprechstunde nach Vereinbarung
  - ▶ in der Tutorübung
  - ▶ in der Zentralübung
- ▶ Email (inhaltliche Fragen ins Forum)
- ▶ Diskussions-Forum in Moodle

## Feedback

Feedback zur Vorlesung/Übung ist jederzeit willkommen (bitte nicht erst in den Evaluierungsbögen)!

# Kontakt und Feedback

## Für Fragen:

- ▶ Persönlich
  - ▶ Sprechstunde nach Vereinbarung
  - ▶ in der Tutorübung
  - ▶ in der Zentralübung
- ▶ Email (inhaltliche Fragen ins Forum)
- ▶ Diskussions-Forum in Moodle

## Feedback

Feedback zur Vorlesung/Übung ist jederzeit willkommen (bitte nicht erst in den Evaluierungsbögen)!

# Ablauf: Vorlesung

## Folienvortrag

- ▶ mit gelegentlichen Annotationen
- ▶ kein Skript!
- ▶ Folien vor Vorlesung als PDF zum Download

Eigene Notizen sind hilfreich!

# Ablauf: Zentralübung

- ▶ Keine Zentralübung am **Dienstag, 22.04.2019**
- ▶ Erste Zentralübung: **Dienstag, 30.04.2018**

# Ablauf: Zentralübung

- ▶ Keine Zentralübung am **Dienstag, 22.04.2019**
- ▶ Erste Zentralübung: **Dienstag, 30.04.2018**
  
- ▶ Beispielaufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung
- ▶ Begleitetes Programmieren in C/C++

# Ablauf: Zentralübung

- ▶ Keine Zentralübung am **Dienstag, 22.04.2019**
- ▶ Erste Zentralübung: **Dienstag, 30.04.2018**
  
- ▶ Beispielaufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung
- ▶ Begleitetes Programmieren in C/C++
  
- ▶ Beantwortung von ausgewählten Fragen
- ▶ nur Fragen zur Vorlesung (Fragen zu Übungsblättern in Tutorübungsgruppen)

# Ablauf: Tutorübungen

Keine Tutorübungen in der ersten Vorlesungswoche

Erste Tutorübung ab **Montag, 6.05.2019**

Jede Woche ein Übungsblatt

- ▶ 3-5 Aufgaben
- ▶ zur Anwendung und Vertiefung der Vorlesung

In der **Tutorübung**

- ▶ Besprechung der Aufgaben
- ▶ Individuelle Beantwortung von Fragen
- ▶ keine Korrektur der Aufgaben

Eigene Bearbeitung der Übungsblätter dringend empfohlen!

- ▶ z.B. auch in kleinen Gruppen

# Ablauf: Tutorübungen

Keine Tutorübungen in der ersten Vorlesungswoche

Erste Tutorübung ab **Montag, 6.05.2019**

Jede Woche ein Übungsblatt

- ▶ 3-5 Aufgaben
- ▶ zur Anwendung und Vertiefung der Vorlesung

In der **Tutorübung**

- ▶ Besprechung der Aufgaben
- ▶ Individuelle Beantwortung von Fragen
- ▶ keine Korrektur der Aufgaben

Eigene Bearbeitung der Übungsblätter dringend empfohlen!

- ▶ z.B. auch in kleinen Gruppen

# Ablauf: Tutorübungen

Keine Tutorübungen in der ersten Vorlesungswoche

Erste Tutorübung ab **Montag, 6.05.2019**

Jede Woche ein Übungsblatt

- ▶ 3-5 Aufgaben
- ▶ zur Anwendung und Vertiefung der Vorlesung

In der **Tutorübung**

- ▶ Besprechung der Aufgaben
- ▶ Individuelle Beantwortung von Fragen
- ▶ keine Korrektur der Aufgaben

Eigene Bearbeitung der Übungsblätter dringend empfohlen!

- ▶ z.B. auch in kleinen Gruppen

# Ablauf: Tutorübungen

Keine Tutorübungen in der ersten Vorlesungswoche

Erste Tutorübung ab **Montag, 6.05.2019**

Jede Woche ein Übungsblatt

- ▶ 3-5 Aufgaben
- ▶ zur Anwendung und Vertiefung der Vorlesung

In der **Tutorübung**

- ▶ Besprechung der Aufgaben
- ▶ Individuelle Beantwortung von Fragen
- ▶ keine Korrektur der Aufgaben

Eigene Bearbeitung der Übungsblätter dringend empfohlen!

- ▶ z.B. auch in kleinen Gruppen

# Leistungsnachweis

Klausur am 6.08.2019

- ▶ Schriftliche Prüfung
- ▶ Dauer: 120 Minuten
- ▶ erlaubte Hilfsmittel: handbeschriebenes DIN A4 Blatt

Vorbereitung durch **aktive** Teilnahme und Bearbeitung des Übungs-Programms

Keine Probeklausuren

# Leistungsnachweis

Klausur am 6.08.2019

- ▶ Schriftliche Prüfung
- ▶ Dauer: 120 Minuten
- ▶ erlaubte Hilfsmittel: handbeschriebenes DIN A4 Blatt

Vorbereitung durch **aktive** Teilnahme und Bearbeitung des Übungs-Programms

Keine Probeklausuren

# Leistungsnachweis

Klausur am 6.08.2019

- ▶ Schriftliche Prüfung
- ▶ Dauer: 120 Minuten
- ▶ erlaubte Hilfsmittel: handbeschriebenes DIN A4 Blatt

Vorbereitung durch **aktive** Teilnahme und Bearbeitung des Übungs-Programms

Keine Probeklausuren

# Allgemeine Regeln

Wir dulden keine Ruhestörung!

- ▶ Weder in Vorlesung und Übung, noch in Tutorübungen
- ▶ Es besteht keine Anwesenheitspflicht!

Fragen nach den Veranstaltungen!

- ▶ ausserhalb des Hörsaals!
- ▶ Fragen sonst gerne während den Veranstaltungen, per Email/Diskussionsforum oder persönlich nach Vereinbarung

Transferleistung zu Computertechnik bzw. GOP dringend empfohlen

- ▶ Begleitetes Programmieren während der Zentralübung aktiv wahrnehmen
- ▶ Hilft enorm für besseres Verständnis der Algorithmen

# 1 Literatur

-  Alfred V. Aho, John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman:  
*The design and analysis of computer algorithms*,  
Addison-Wesley Publishing Company: Reading (MA), 1974
-  Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ron L. Rivest,  
Clifford Stein:  
*Introduction to algorithms*,  
McGraw-Hill, 1990
-  Michael T. Goodrich, Roberto Tamassia:  
*Algorithm design: Foundations, analysis, and internet  
examples*,  
John Wiley & Sons, 2002

# 1 Literatur



Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik:  
*Concrete Mathematics*,  
2. Auflage, Addison-Wesley, 1994



Volker Heun:  
*Grundlegende Algorithmen: Einführung in den Entwurf und die Analyse effizienter Algorithmen*,  
2. Auflage, Vieweg, 2003



Jon Kleinberg, Eva Tardos:  
*Algorithm Design*,  
Addison-Wesley, 2005



Donald E. Knuth:  
*The art of computer programming. Vol. 1: Fundamental Algorithms*,  
3. Auflage, Addison-Wesley, 1997

# 1 Literatur



Uwe Schöning:

*Algorithmik,*

Spektrum Akademischer Verlag, 2001



Steven S. Skiena:

*The Algorithm Design Manual,*

Springer, 1998

# Teil II

## Grundlagen

# Ziele der Vorlesung

## Wissen:

- ▶ Algorithmische Prinzipien verstehen und anwenden
- ▶ Grundlegende Algorithmen kennen lernen
- ▶ Grundlegende Datenstrukturen kennen lernen
- ▶ Bewertung von Effizienz und Korrektheit

## Methodenkompetenz:

- ▶ für Entwurf von effizienten und korrekten Algorithmen
- ▶ zur Analyse von Algorithmen
- ▶ zur Umsetzung auf dem Computer

# Ziele der Vorlesung

## Wissen:

- ▶ Algorithmische Prinzipien verstehen und anwenden
- ▶ Grundlegende Algorithmen kennen lernen
- ▶ Grundlegende Datenstrukturen kennen lernen
- ▶ Bewertung von Effizienz und Korrektheit

## Methodenkompetenz:

- ▶ für Entwurf von effizienten und korrekten Algorithmen
- ▶ zur Analyse von Algorithmen
- ▶ zur Umsetzung auf dem Computer

# Übersicht der Inhalte

Grundlagen:

- 1. Einführung in Algorithmen und Datenstrukturen**  
Motivation, Definitionen, Einordnung
- 2. Grundlagen von Algorithmen**  
Darstellung, elementare Bausteine, Pseudocode
- 3. Grundlagen von Datenstrukturen**  
Primitive Datentypen, Felder, abstrakte Datentypen
- 4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen**  
Verifikation, Testen, Sortieren
- 5. Grundlagen der Effizienz von Algorithmen**  
Komplexitätsanalyse, Sortieren
- 6. Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs**  
Entwurfs-Prinzipien

# Übersicht der Inhalte

Fortgeschrittene Algorithmen und Datenstrukturen:

## 7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

Bäume, Graphen, Priority-Queue

## 8. Such-Algorithmen

Elementare Suchmethoden, Suchbäume

## 9. Graph-Algorithmen

Elementare Algorithmen, kürzeste Pfade, Spannbaum

## 10. Numerische Algorithmen

Matrizen-Operationen, Fast Fourier Transform

# Übersicht der Inhalte

Ausgewählte Themen (je nach verfügbarer Zeit):

## 11. Datenkompression

Huffmann-Codes, JPEG

## 12. Kryptographie

symmetrische und asymmetrische  
Verschlüsselungsverfahren

# Was ist ein Algorithmus?

## Duden online:

„Rechenvorgang nach einem bestimmten (sich wiederholenden) Schema“

Beispiele für Algorithmen bereits in der Antike, etwa der **Euklidische Algorithmus** zur Berechnung des ggT:

„Wenn CD aber AB nicht misst, und man nimmt bei AB, CD abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muss (schließlich) eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst.“

aus *Euklid: Die Elemente, Buch VII (Clemens Thaer)*

# Was ist ein Algorithmus?

## Duden online:

„Rechenvorgang nach einem bestimmten (sich wiederholenden) Schema“

Beispiele für Algorithmen bereits in der Antike, etwa der **Euklidsche Algorithmus** zur Berechnung des ggT:

„Wenn CD aber AB nicht misst, und man nimmt bei AB, CD abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muss (schließlich) eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst.“

aus *Euklid: Die Elemente, Buch VII (Clemens Thaer)*

# Was ist ein Algorithmus?

## M. Broy: Informatik: Eine grundlegende Einführung

„Ein Algorithmus ist ein Verfahren

- ▶ mit einer **präzisen** (d.h. in einer genau festgelegten Sprache abgefassten),
- ▶ **endlichen** Beschreibung,
- ▶ unter Verwendung
  - ▶ **effektiver** (d.h. tatsächlich ausführbarer),
  - ▶ **elementarer** (Verarbeitungs-) Schritte.“

# Was ist ein Algorithmus?

H. Rogers:

Theory of Recursive Functions and Effective Computability

„Ein Algorithmus ist eine

- ▶ **deterministische** Handlungsvorschrift,
- ▶ die auf eine bestimmte Klasse von **Eingaben** angewendet werden kann,
- ▶ und für jede dieser Eingaben eine korrespondierende **Ausgabe** liefert.“

Im weiteren Verlauf des Buches wird mathematische Theorie zur  
↑**Berechenbarkeit** entwickelt

↑**theoretische Informatik**

# Was ist ein Algorithmus?

## Mathematische Definition Algorithmus

Eine Berechnungsvorschrift zur Lösung eines Problems heißt **Algorithmus** genau dann, wenn

- ▶ eine zu dieser Berechnungsvorschrift äquivalente **Turingmaschine** existiert,
- ▶ die für jede **Eingabe**, die eine **Lösung** besitzt, **terminiert**.

Alan Turing (1936): **Turingmaschine** als mathematisches Modell eines Computers

↑theoretische Informatik

## 3 Einführung

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion  $f : E \rightarrow A$ , mit  $E =$  zulässige Eingaben und  $A =$  mögliche Ausgaben.

Beispiele:

• Addition

• Bruchrechnen

• Suchen (z.B. Lösung einer Menge einer

• Technisches Zeichnen (z.B. Bestimmen der besten Zug- in Position)

## 3 Einführung

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

### **mathematisch:**

Ein Problem beschreibt eine Funktion  $f : E \rightarrow A$ , mit  $E =$  zulässige Eingaben und  $A =$  mögliche Ausgaben.

### Beispiele:

## 3 Einführung

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

### mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion  $f : E \rightarrow A$ , mit  $E =$  zulässige Eingaben und  $A =$  mögliche Ausgaben.

### Beispiele:

- ▶ Addition:  $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
- ▶ Primzahltest:  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$
- ▶ Schach:  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}$ , wobei  $\mathcal{P}$  die Menge aller Schachpositionen ist, und  $f(P)$ , der beste Zug in Position  $P$ .

## 3 Einführung

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

### mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion  $f : E \rightarrow A$ , mit  $E =$  zulässige Eingaben und  $A =$  mögliche Ausgaben.

### Beispiele:

- ▶ Addition:  $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
- ▶ Primzahltest:  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$
- ▶ Schach:  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}$ , wobei  $\mathcal{P}$  die Menge aller Schachpositionen ist, und  $f(P)$ , der beste Zug in Position  $P$ .

## 3 Einführung

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

### mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion  $f : E \rightarrow A$ , mit  $E =$  zulässige Eingaben und  $A =$  mögliche Ausgaben.

### Beispiele:

- ▶ Addition:  $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
- ▶ Primzahltest:  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$
- ▶ Schach:  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}$ , wobei  $\mathcal{P}$  die Menge aller Schachpositionen ist, und  $f(P)$ , der beste Zug in Position  $P$ .

# Algorithmus

Ein **Algorithmus** ist ein **exaktes Verfahren** zur Lösung eines Problems, d.h. zur Bestimmung der gewünschten Resultate.

Man sagt auch ein Algorithmus **berechnet** eine Funktion  $f$ .



Ausschnitt aus Briefmarke, Soviet Union 1983  
Public Domain [↗](#)

Abu Abdallah  
Muhamed ibn Musa  
al-Chwarizmi, ca.  
780–835

## Beobachtung:

Nicht jedes Problem läßt sich durch einen Algorithmus lösen  
(↑**Berechenbarkeitstheorie**).

## Beweisidee:

- ▶ es gibt überabzählbar unendlich viele Probleme
- ▶ es gibt abzählbar unendlich viele Algorithmen

## Beobachtung:

Nicht jedes Problem läßt sich durch einen Algorithmus lösen  
(↑**Berechenbarkeitstheorie**).

## Beweisidee:

- ▶ es gibt **überabzählbar unendlich** viele Probleme
- ▶ es gibt **abzählbar unendlich** viele Algorithmen

# Algorithmus

Das **exakte Verfahren** besteht i.a. darin, eine Abfolge von **elementaren Einzelschritten** der Verarbeitung festzulegen.

**Beispiel:** Alltagsalgorithmen

<i>Resultat</i>	<i>Algorithmus</i>	<i>Einzelschritte</i>
Pullover	Strickmuster	eine links, eine rechts, eine fallen lassen
Kuchen	Rezept	nimm 3 Eier ...
Konzert	Partitur	Noten

# Beispiel: Euklidischer Algorithmus

**Problem:** geg.  $a, b \in \mathbb{N}, a, b \neq 0$ . Bestimme  $\text{ggT}(a, b)$ .

**Algorithmus:**

1. Falls  $a = b$ , brich Berechnung ab. Es gilt  $\text{ggT}(a, b) = a$ .  
Ansonsten gehe zu Schritt 2.
2. Falls  $a > b$ , ersetze  $a$  durch  $a - b$  und setze Berechnung in Schritt 1 fort. Ansonsten gehe zu Schritt 3.
3. Es gilt  $a < b$ . Ersetze  $b$  durch  $b - a$  und setze Berechnung in Schritt 1 fort.

# Beispiel: Euklidischer Algorithmus

**Warum geht das?**

Wir zeigen, für  $a > b$ :  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$ .

Seien  $g = \text{ggT}(a, b)$ ,  $g' = \text{ggT}(a - b, b)$ .

Dann gilt:

# Beispiel: Euklidischer Algorithmus

## Warum geht das?

Wir zeigen, für  $a > b$ :  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$ .

Seien  $g = \text{ggT}(a, b)$ ,  $g' = \text{ggT}(a - b, b)$ .

Dann gilt:

$$\begin{array}{lcl} a & = & q_a \cdot g \\ b & = & q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lcl} a - b & = & q'_{a-b} \cdot g' \\ b & = & q'_b \cdot g' \end{array}$$

# Beispiel: Euklidischer Algorithmus

## Warum geht das?

Wir zeigen, für  $a > b$ :  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$ .

Seien  $g = \text{ggT}(a, b)$ ,  $g' = \text{ggT}(a - b, b)$ .

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} a = q_a \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a - b = q'_{a-b} \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - b = (q_a - q_b) \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a = (q'_{a-b} + q'_b) \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

# Beispiel: Euklidischer Algorithmus

## Warum geht das?

Wir zeigen, für  $a > b$ :  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$ .

Seien  $g = \text{ggT}(a, b)$ ,  $g' = \text{ggT}(a - b, b)$ .

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} a = q_a \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a - b = q'_{a-b} \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - b = (q_a - q_b) \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a = (q'_{a-b} + q'_b) \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

Das heißt  $g$  ist Teiler von  $a - b, b$  und  $g'$  ist Teiler von  $a, b$ .

Daraus folgt  $g \leq g'$  und  $g' \leq g$ , also  $g = g'$ .

# Eigenschaften

**(statische) Finitheit.** Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

**(dynamische) Finitheit.** Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

**Terminiertheit.** Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme**, ↑**reaktive Systeme**)

**Determiniertheit.** Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

**Determinismus.** Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

# Eigenschaften

**(statische) Finitheit.** Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

**(dynamische) Finitheit.** Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

**Terminiertheit.** Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme, reaktive Systeme**)

**Determiniertheit.** Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen, nicht-deterministische Algorithmen**)

**Determinismus.** Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen, nicht-deterministische Algorithmen**)

# Eigenschaften

**(statische) Finitheit.** Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

**(dynamische) Finitheit.** Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

**Terminiertheit.** Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme**, ↑**reaktive Systeme**)

**Determiniertheit.** Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

**Determinismus.** Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

# Eigenschaften

**(statische) Finitheit.** Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

**(dynamische) Finitheit.** Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

**Terminiertheit.** Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme**, ↑**reaktive Systeme**)

**Determiniertheit.** Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

**Determinismus.** Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

# Eigenschaften

**(statische) Finitheit.** Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

**(dynamische) Finitheit.** Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

**Terminiertheit.** Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme**, ↑**reaktive Systeme**)

**Determiniertheit.** Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

**Determinismus.** Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

## Entscheidende Fragestellungen:

- ▶ **Darstellung** → Kapitel 2
- ▶ **Robustheit** und **Korrektheit** → Kapitel 4
- ▶ **Effizienz** und **Komplexität** → Kapitel 5
- ▶ **Entwurfstechniken** → Kapitel 6

# Definition Datenstruktur

## Definition Datenstruktur (nach Prof. Eckert)

Eine Datenstruktur ist eine

- ▶ **logische Anordnung** von Datenobjekten,
- ▶ die **Informationen repräsentieren**,
- ▶ den **Zugriff** auf die repräsentierte Information über **Operationen** auf Daten ermöglichen und
- ▶ die Information **verwalten**.

# Beispiel Datenstruktur

**Stapel** (oder Englisch: **Stack**), z.B. Pizza-Stapel

Operationen:

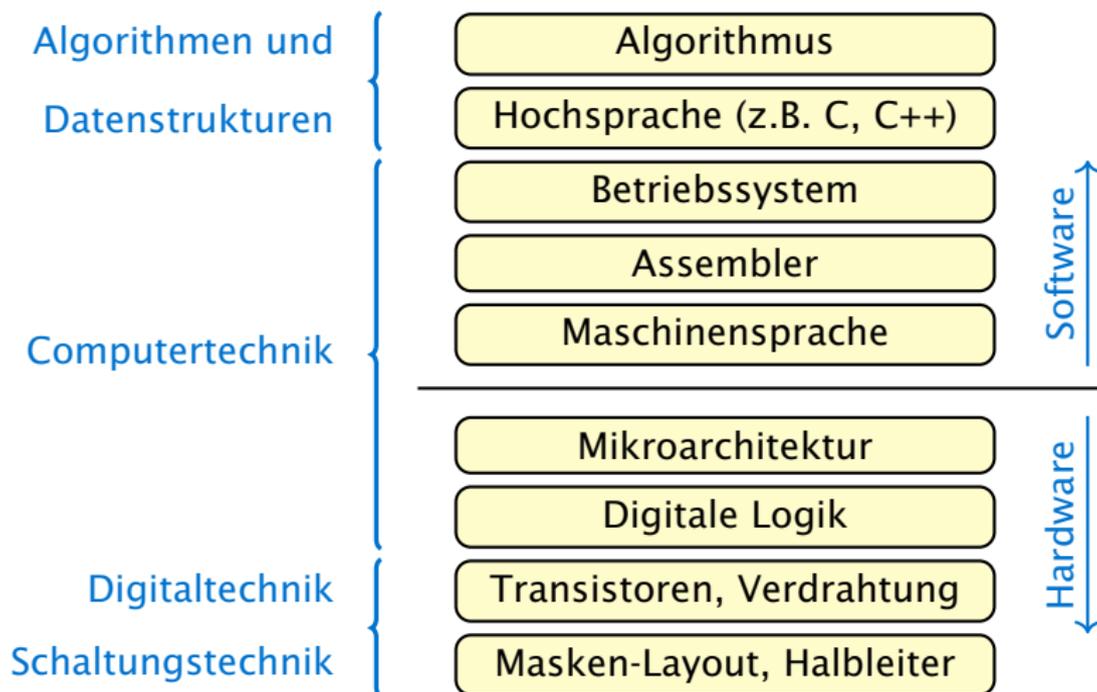
- ▶ Element auf Stapel legen – **push**
- ▶ Element von Stapel nehmen – **pop**

Operationen jeweils nur auf oberstem Element!

# Weitere Beispiele von Datenstrukturen

- ▶ **Felder, Listen, Stack, Queue** → Kapitel 3
- ▶ **Bäume, Graphen** → Kapitel 7, 8, 9

# Wie funktioniert ein Computer?



*Schema nach Prof. Diepold: Grundlagen der Informatik.*

# Einordnung Algorithmen und Datenstrukturen

## Beispiel-Problem Navigationssystem Auto

Finde kürzesten Weg von Berlin nach München.

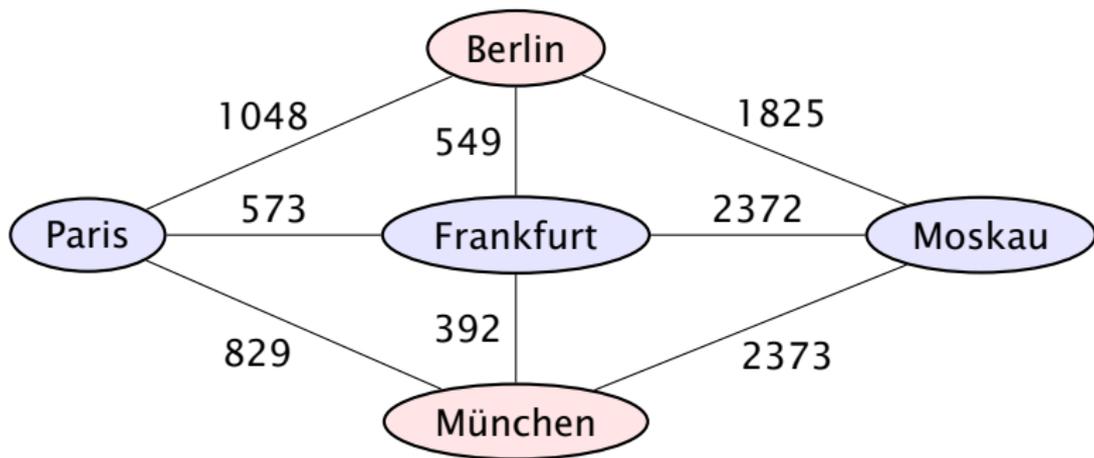


# Einordnung Algorithmen und Datenstrukturen

## Beispiel-Problem Navigationssystem Auto

Finde kürzesten Weg von Berlin nach München.

- **Datenstruktur:** gewichteter Graph (→ Kapitel 7)

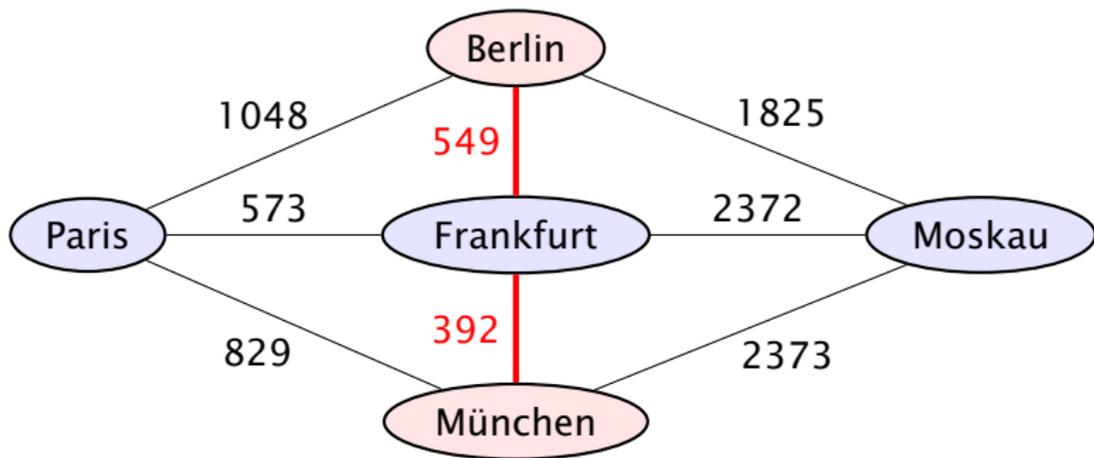


# Einordnung Algorithmen und Datenstrukturen

## Beispiel-Problem Navigationssystem Auto

Finde kürzesten Weg von Berlin nach München.

- ▶ **Datenstruktur:** gewichteter Graph (→ Kapitel 7)
- ▶ **Algorithmus:** kürzester Pfad (→ Kapitel 9)



# Einordnung Algorithmen und Datenstrukturen

## Beispiel-Problem Navigationssystem Auto

**Finde kürzesten Weg von Berlin nach München.**

- ▶ **Datenstruktur:** gewichteter Graph (→ Kapitel 7)
- ▶ **Algorithmus:** kürzester Pfad (→ Kapitel 9)
- ▶ **Algorithmus-Beschreibung:** Programmiersprache (z.B. C)

# Einordnung Algorithmen und Datenstrukturen

## Beispiel-Problem Navigationssystem Auto

**Finde kürzesten Weg von Berlin nach München.**

- ▶ **Datenstruktur:** gewichteter Graph (→ Kapitel 7)
- ▶ **Algorithmus:** kürzester Pfad (→ Kapitel 9)
- ▶ **Algorithmus-Beschreibung:** Programmiersprache (z.B. C)
- ▶ **Übersetzung in Maschinensprache:** Compiler (z.B. GCC)

# Einordnung Algorithmen und Datenstrukturen

## Beispiel-Problem Navigationssystem Auto

**Finde kürzesten Weg von Berlin nach München.**

- ▶ **Datenstruktur:** gewichteter Graph (→ Kapitel 7)
- ▶ **Algorithmus:** kürzester Pfad (→ Kapitel 9)
- ▶ **Algorithmus-Beschreibung:** Programmiersprache (z.B. C)
- ▶ **Übersetzung in Maschinensprache:** Compiler (z.B. GCC)
- ▶ **Aufruf des Programms:** Betriebssystem (z.B. Linux)

# Einordnung Algorithmen und Datenstrukturen

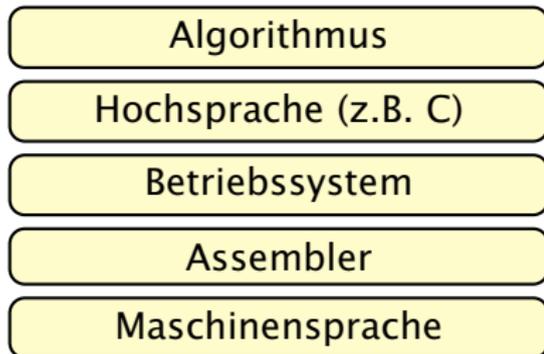
## Beispiel-Problem Navigationssystem Auto

**Finde kürzesten Weg von Berlin nach München.**

- ▶ **Datenstruktur:** gewichteter Graph (→ Kapitel 7)
- ▶ **Algorithmus:** kürzester Pfad (→ Kapitel 9)
- ▶ **Algorithmus-Beschreibung:** Programmiersprache (z.B. C)
- ▶ **Übersetzung in Maschinensprache:** Compiler (z.B. GCC)
- ▶ **Aufruf des Programms:** Betriebssystem (z.B. Linux)
- ▶ **Ausführung des Programms:** Computer (z.B. Laptop)

# Einordnung Algorithmen und Datenstrukturen

Algorithmen und  
Datenstrukturen



Software ↑



Hardware ↓

*Schema nach Prof. Diepold: Grundlagen der Informatik.*

# Wie beschreibt man Algorithmen?

## Algorithmus: bestimme Maximum von zwei Zahlen

- ▶ Input: Zahlen  $a, b$
- ▶ Output: Zahl  $x = \max(a, b)$

**Problem:** präzise Beschreibung der Schritte

# Wie beschreibt man Algorithmen?

**Algorithmus: bestimme Maximum von zwei Zahlen**

- ▶ Input: Zahlen  $a, b$
- ▶ Output: Zahl  $x = \max(a, b)$

**Problem:** präzise Beschreibung der Schritte

**Lösung:** Pseudocode

Algorithmus:  $\max(a, b)$

Input:  $a, b$

$x = a$

Falls  $b > a$  dann

$x = b$

Ende Falls

Output:  $x$

# Darstellung von Algorithmen I

## Pseudocode

- ▶ informelle Veranschaulichung von Algorithmus
- ▶ nicht von Rechner ausführbar
- ▶ nicht standardisiert

Algorithmus:  $\max(a,b)$

Input:  $a,b$

$x=a$

Falls  $b>a$  dann

$x=b$

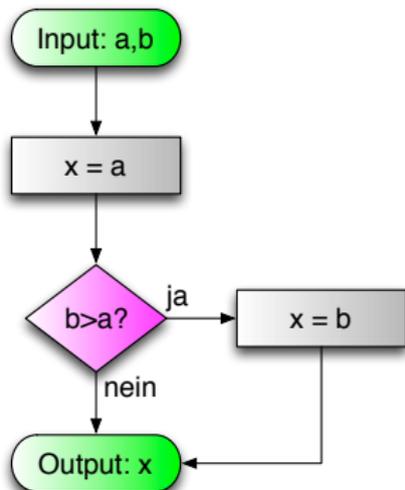
Ende Falls

Output:  $x$

# Darstellung von Algorithmen II

## Flussdiagramm

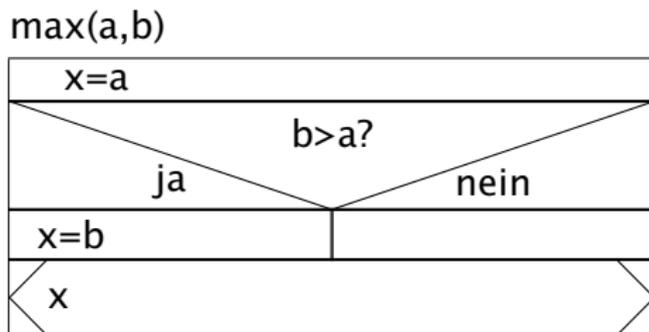
- ▶ graphische Darstellung als Ablaufdiagramm, nicht ausführbar
- ▶ normiert als DIN 66001



# Darstellung von Algorithmen III

## Struktogramm

- ▶ Diagramm zur Strukturdarstellung, nicht ausführbar
- ▶ eingeführt von Nassi/Shneiderman 1973, normiert als DIN 66261



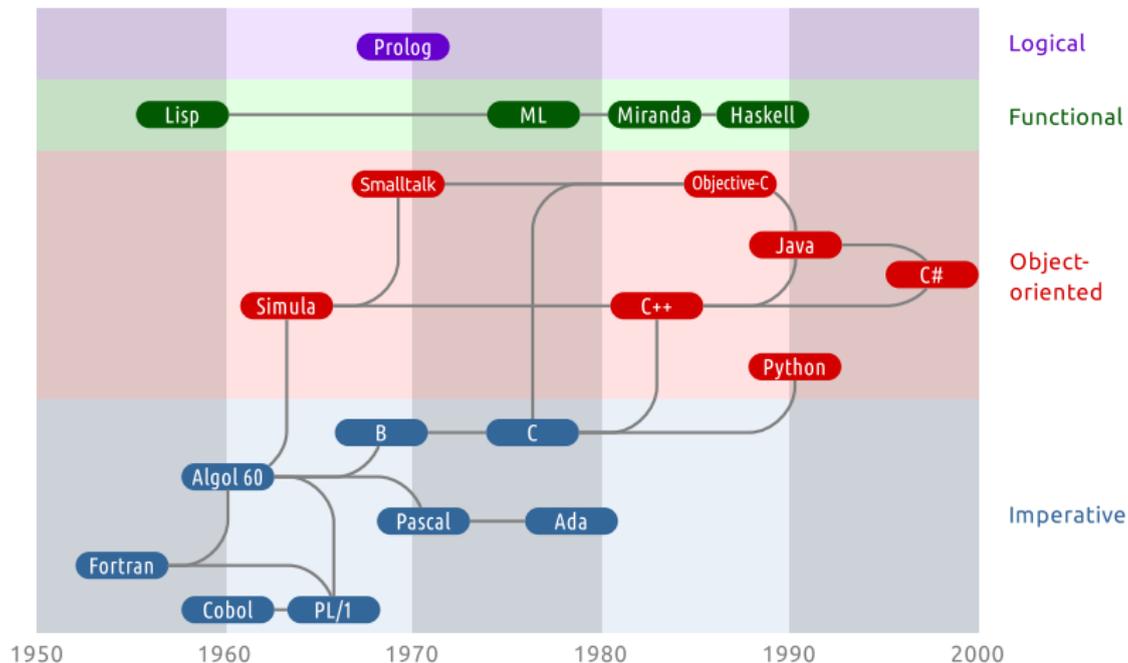
# Darstellung von Algorithmen IV

## Programmiersprache

- ▶ formale Sprache zur Beschreibung von Algorithmen
- ▶ fest definierte Syntax
- ▶ ein Compiler/Interpreter wandelt Programm in ausführbare Form für Rechner um
- ▶ Beispiele: Assembler, C, Java
  
- ▶ Algorithmus in C:

```
1 int max(int a, int b) {  
2     int x = a;  
3     if (b > a)  
4         x = b;  
5     return x;  
6 }
```

# Programmiersprachen Übersicht



Grafik von Alexandru Dului.

# Äquivalenz von Algorithmen-Beschreibungen

## Churchsche These

Alle „vernünftigen“ Definitionen von Algorithmen sind äquivalent.

- ▶ alle gängigen Programmiersprachen leisten dasselbe
- ▶ jeder Computer ist äquivalent
  
- ▶ formal: berechenbare Funktionen, formale Sprachen, Automaten, Turing-Maschinen

↑theoretische Informatik

# Äquivalenz von Algorithmen-Beschreibungen

## Churchsche These

Alle „vernünftigen“ Definitionen von Algorithmen sind äquivalent.

- ▶ alle gängigen Programmiersprachen leisten dasselbe
- ▶ jeder Computer ist äquivalent
  
- ▶ formal: berechenbare Funktionen, formale Sprachen, Automaten, Turing-Maschinen

↑theoretische Informatik

# Bausteine von Algorithmen

## Elementare Bausteine

„Normale“ Algorithmen lassen sich mit

### **vier elementaren Bausteinen**

darstellen:

1. Elementarer Verarbeitungsschritt (z.B. Zuweisung an Variable)
2. Sequenz (elementare Schritte nacheinander)
3. Bedingter Verarbeitungsschritt (z.B. if/else)
4. Wiederholung (z.B. while-Schleife)

# 1. Elementarer Verarbeitungsschritt

## Beispiele

- ▶ `a = a - b // weist Variable a den Wert a-b zu`
- ▶ `return a // liefert den Wert von a zurueck`

**Achtung:** manche Verarbeitungsschritte sehen elementar aus, sind es aber nicht!

- ▶ `sortiere Liste L // nicht elementar`
- ▶ `finde kuerzesten Pfad in G // nicht elementar`

## 2. Sequenz

Sequenz ist eine **Aneinanderreihung** von elementaren Verarbeitungsschritten

Abgrenzung der Schritte mittels **Semikolon (;)**

### Beispiel

- ▶ `x = 5; // Zuweisung von Wert 5 an Variable x`
- ▶ `x = x + 2; // Wert von x ist nun 7`

Um Ausnahmen zu vermeiden, wird Semikolon auch verwendet, wenn kein weiterer Schritt folgt

## 3. Bedingter Verarbeitungsschritt

Ausführung des Verarbeitungsschrittes nur wenn **Bedingung** erfüllt ist

### Beispiele:

- ▶ `if (a > b) // Bedingung wird in Klammern notiert`  
    `a = a - b;`
- ▶ `if (a > b)`  
    `a = a - b;`  
    `else // falls Bedingung nicht erfuehlt`  
    `b = b - a;`

**Einrückung** verdeutlicht logische Ebenen

## 3. Bedingter Verarbeitungsschritt

falls mehr als ein Verarbeitungsschritt bedingt ausgeführt werden soll, Markierung durch einen Block `{ ... }` mit geschweiften Klammern

### Beispiel

```
if (x == 0) {  
    x = 5;  
    x = x + 2;  
} // if Block ist hier zu Ende  
else {  
    x = x - 1;  
} // else Block ist hier zu Ende
```

auch einzelne Schritte können in einen Block gefasst werden

## 4. Wiederholung

wiederholte Ausführung von Verarbeitungsschritt/Block solange Bedingung erfüllt ist (auch **while Schleife** genannt)

### Beispiele

- ▶ `while (x != 0) // Bedingung in Klammern`  
    `x = x - 1;`
- ▶ `while (b > 0) { // Block fuer mehrere Schritte`  
    `if (a > b)`  
        `a = a - b;`  
    `else`  
        `b = b - a;`  
    `} // while Block ist hier zu Ende`

## 4. Wiederholung

Es gibt auch andere Schleifentypen: **do-while Schleife**:

```
▶ do {  
    x = x - 1;  
} while (x != 0); // Vorsicht by floats!!!
```

**for-Schleife**:

```
▶ for i=1 to 10  
    print(i); // gibt Wert von i aus
```

Achtung, Syntax der **for-Schleife** ist in C komplexer!

```
▶ for (i=1; i <= 10; i++) // echte C Syntax  
    print(i);
```

# Beispiel: Euklidischer Algorithmus

- ▶ Einrücken **oder** geschweifte Klammern `{, }` kennzeichnen **Blockstruktur**

```
1  euklid(a,b)
2      if (a == 0)
3          return b;
4      while (b > 0) {
5          if (a > b)
6              a = a - b;
7          else
8              b = b - a;
9      }
10     return a;
```

Euklidischer Algorithmus

# Beispiel: Euklidischer Algorithmus

- ▶ Einrücken **oder** geschweifte Klammern `{, }` kennzeichnen **Blockstruktur**
- ▶ In C so nicht möglich

```
1 euklid(a,b)
2     if (a == 0)
3         return b;
4     while (b > 0)
5         if (a > b)
6             a = a - b;
7         else
8             b = b - a;
9     return a;
```

Euklidischer Algorithmus

# Euklidischer Algorithmus

**Input:** Natürliche Zahlen  $a, b$

**Output:**  $\text{ggT}(a, b)$

1. Falls  $a = 0$  liefere  $b$  zurück
2. Solange  $b > 0$  wiederhole  
Falls  $a > b$  setze  $a = a - b$   
sonst setze  $b = b - a$
3. Liefere  $a$  zurück

# Euklidischer Algorithmus

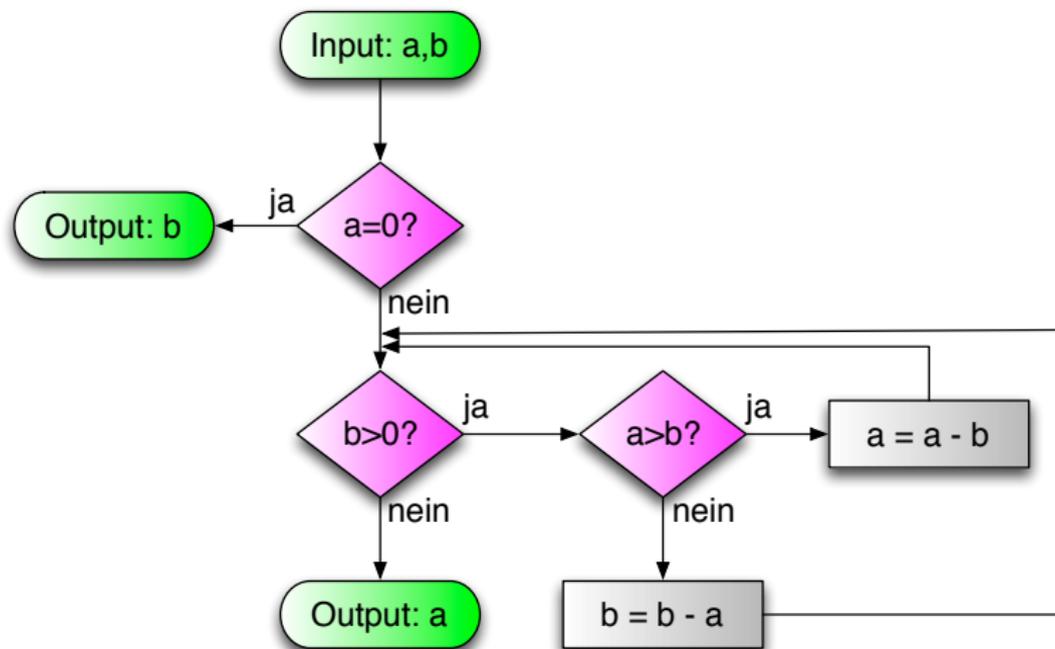
**Input:** Natürliche Zahlen  $a, b$

**Output:**  $\text{ggT}(a, b)$

1. Falls  $a = 0$  liefere  $b$  zurück
2. Solange  $b > 0$  wiederhole  
Falls  $a > b$  setze  $a = a - b$   
sonst setze  $b = b - a$
3. Liefere  $a$  zurück

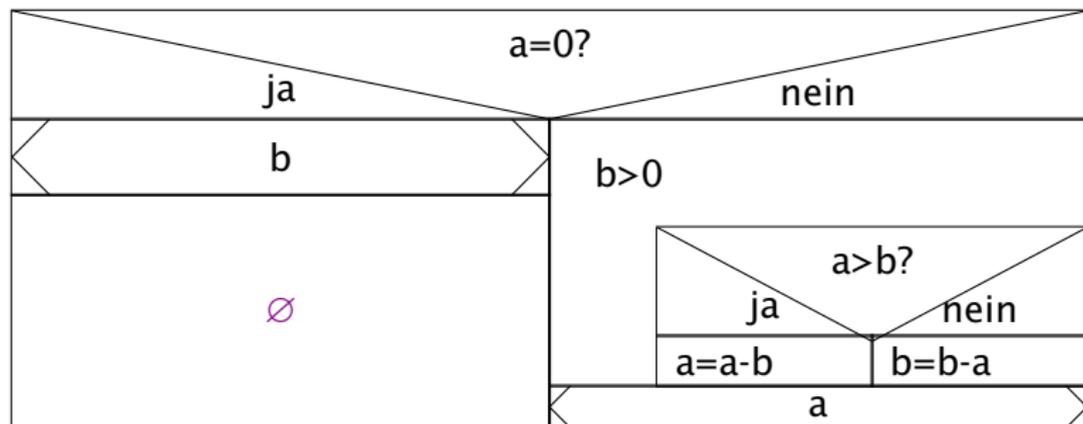
→ das ist Pseudocode!

# Euklidischer Algorithmus als Flussdiagramm



# Euklidischer Algorithmus als Struktogramm

ggT(a,b)



# Euklidischer Algorithmus als Pseudocode

```
1 Input: natuerliche Zahlen a, b
2 Output: ggT(a,b)
3 euklid(a,b)
4     if (a == 0)
5         return b;
6     while (b > 0) { // Hauptschleife
7         if (a > b)
8             a = a - b;
9         else
10            b = b - a;
11    }
12    return a;
```

## Euklidischer Algorithmus

# Euklidischer Algorithmus als C

```
1 int ggT(int a, int b)
2 {
3     if (a==0)
4         return b;
5     while (b>0) {
6         if (a>b)
7             a = a - b;
8         else
9             b = b - a;
10    }
11    return a;
12 }
```

# Euklidischer Algorithmus als Python

```
1 def ggT(a, b):
2     if a == 0:
3         return b
4     while b > 0:
5         if a > b:
6             a = a - b
7         else:
8             b = b - a
9     return a
```

# Darstellung von Algorithmen in der Vorlesung

viele Möglichkeiten der Darstellung!

- ▶ alle vernünftigen Darstellungen sind äquivalent
- ▶ jede Darstellung hat Vor- und Nachteile

für die Vorlesung: **Pseudocode im C Stil**

Zusatzmaterial für viele Beispiele aus der Vorlesung:

- ▶ <http://www.brpreiss.com/books/opus7/>
- ▶ Beispiele in:
  - ▶ Python
  - ▶ C++
  - ▶ Java
  - ▶ C#
  - ▶ und vieles mehr...

# Beispiel: Fibonacci Zahlen

## Fibonacci Folge

Die **Fibonacci Folge** ist eine Folge natürlicher Zahlen  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , für die gilt

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3$$

mit Anfangswerten  $f_1 = 1, f_2 = 1$ .

- ▶ eingesetzt von Leonardo Fibonacci zur Beschreibung von Wachstum einer Kaninchenpopulation
- ▶ Folge lautet: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
- ▶ berechenbar z.B. via Rekursion



# Beispiel: Fibonacci Funktion

**Input:** Index  $n$  der Fibonaccifolge

**Output:** Wert  $f_n$

```
fib(n)
  if (n == 1 || n == 2) {
    return 1;
  }
  else {
    // rekursiver Aufruf
    return fib(n-1) + fib(n-2);
  }
```

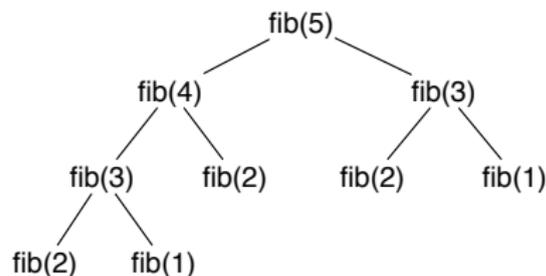
# Beispiel: Fibonacci Funktion

Input: Index  $n$  der Fibonaccifolge

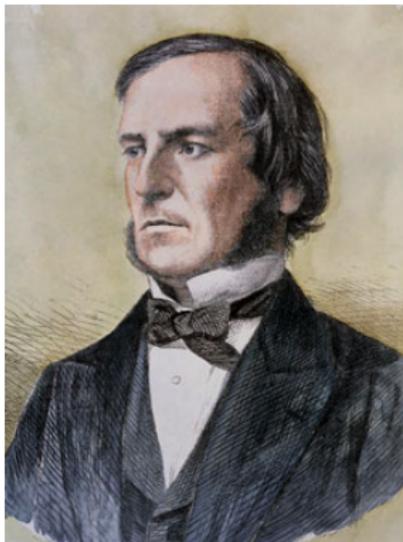
Output: Wert  $f_n$

```
fib(n)
  if (n == 1 || n == 2) {
    return 1;
  }
  else {
    // rekursiver Aufruf
    return fib(n-1) + fib(n-2);
  }
```

Aufrufstruktur für fib(5):



# George Boole



Englischer Mathematiker (1815-1864)

## Boolesche Logik: Logik mit zwei Werten

Repräsentationen:

- ▶ 1 und 0
- ▶ W und F (in Englisch: T und F)
- ▶ L und O

Mengensymbol  $\mathbb{B}$

- ▶  $\mathbb{B} = \{0, 1\} = \{F, W\} = \{O, L\}$

# Logische Werte und Verknüpfungen

„Grundrechenarten“ mit logischen Werten:

**Konjunktion:**  $\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ ähnlich zu Multiplikation bei Zahlen
- ▶ auch bezeichnet als **UND** bzw. **AND**

**Disjunktion:**  $\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ ähnlich zu Addition bei Zahlen
- ▶ auch bezeichnet als **ODER** bzw. **OR**

**Negation:**  $\neg : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ auch bezeichnet als **NICHT** bzw. **NOT**

# Logische Werte und Verknüpfungen

„Grundrechenarten“ mit logischen Werten:

**Konjunktion:**  $\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ ähnlich zu Multiplikation bei Zahlen
- ▶ auch bezeichnet als **UND** bzw. **AND**

**Disjunktion:**  $\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ ähnlich zu Addition bei Zahlen
- ▶ auch bezeichnet als **ODER** bzw. **OR**

**Negation:**  $\neg : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ auch bezeichnet als **NICHT** bzw. **NOT**

**Wahrheitstabelle:**

$a$	$b$	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

# Logische Werte und Verknüpfungen

„Grundrechenarten“ mit logischen Werten:

**Konjunktion:**  $\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ ähnlich zu Multiplikation bei Zahlen
- ▶ auch bezeichnet als **UND** bzw. **AND**

**Disjunktion:**  $\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ ähnlich zu Addition bei Zahlen
- ▶ auch bezeichnet als **ODER** bzw. **OR**

**Negation:**  $\neg : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ auch bezeichnet als **NICHT** bzw. **NOT**

**Wahrheitstabelle:**

$a$	$b$	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$a$	$b$	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

# Logische Werte und Verknüpfungen

„Grundrechenarten“ mit logischen Werten:

**Konjunktion:**  $\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ ähnlich zu Multiplikation bei Zahlen
- ▶ auch bezeichnet als **UND** bzw. **AND**

**Disjunktion:**  $\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ ähnlich zu Addition bei Zahlen
- ▶ auch bezeichnet als **ODER** bzw. **OR**

**Negation:**  $\neg : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ auch bezeichnet als **NICHT** bzw. **NOT**

**Wahrheitstabelle:**

$a$	$b$	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$a$	$b$	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$a$	$\neg a$
0	1
1	0

## Weitere Verknüpfungen I

**NAND:**  $\uparrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶  $a \uparrow b = \neg(a \wedge b)$
- ▶ mit NAND lassen sich NOT, OR, AND erzeugen

**NOR:**  $\downarrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶  $a \downarrow b = \neg(a \vee b)$
- ▶ mit NOR lassen sich ebenso NOT, OR, AND erzeugen

**XOR:**  $\oplus: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ auch **exklusiv oder** genannt
- ▶ erzeugbar aus  $\neg(a \wedge b) \wedge (a \vee b)$   
(siehe Übung)

**Wahrheitstabelle:**

$a$	$b$	$a \uparrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

# Weitere Verknüpfungen I

**NAND:**  $\uparrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶  $a \uparrow b = \neg(a \wedge b)$
- ▶ mit NAND lassen sich NOT, OR, AND erzeugen

**NOR:**  $\downarrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶  $a \downarrow b = \neg(a \vee b)$
- ▶ mit NOR lassen sich ebenso NOT, OR, AND erzeugen

**XOR:**  $\oplus: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ auch **exklusiv oder** genannt
- ▶ erzeugbar aus  $\neg(a \wedge b) \wedge (a \vee b)$   
(siehe Übung)

**Wahrheitstabelle:**

$a$	$b$	$a \uparrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$a$	$b$	$a \downarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

# Weitere Verknüpfungen I

**NAND:**  $\uparrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶  $a \uparrow b = \neg(a \wedge b)$
- ▶ mit NAND lassen sich NOT, OR, AND erzeugen

**NOR:**  $\downarrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶  $a \downarrow b = \neg(a \vee b)$
- ▶ mit NOR lassen sich ebenso NOT, OR, AND erzeugen

**XOR:**  $\oplus: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ auch **exklusiv oder** genannt
- ▶ erzeugbar aus  $\neg(a \wedge b) \wedge (a \vee b)$   
(siehe Übung)

**Wahrheitstabelle:**

$a$	$b$	$a \uparrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$a$	$b$	$a \downarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$a$	$b$	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

## Weitere Verknüpfungen II

**Implikation:**  $\Rightarrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ oft verwendet für mathematische Sätze:  
„ $a$  impliziert  $b$ “, „aus  $a$  folgt  $b$ “
- ▶ Beispiel: „aus  $n < 3$  folgt  $n < 5$ “
- ▶ erzeugbar aus  $\neg a \vee b$

**Wahrheitstabelle:**

$a$	$b$	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

**Äquivalenz:**  $\Leftrightarrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ oft verwendet für mathematische Sätze:  
„ $a$  gilt genau dann, wenn  $b$  gilt“,  
„ $a$  und  $b$  sind äquivalent“
- ▶ Beispiel: „ $f$  ist bijektiv genau dann,  
wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist“
- ▶ erzeugbar aus  $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

## Weitere Verknüpfungen II

**Implikation:**  $\Rightarrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ oft verwendet für mathematische Sätze:  
„ $a$  impliziert  $b$ “, „aus  $a$  folgt  $b$ “
- ▶ Beispiel: „aus  $n < 3$  folgt  $n < 5$ “
- ▶ erzeugbar aus  $\neg a \vee b$

**Wahrheitstabelle:**

$a$	$b$	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

**Äquivalenz:**  $\Leftrightarrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

- ▶ oft verwendet für mathematische Sätze:  
„ $a$  gilt genau dann, wenn  $b$  gilt“,  
„ $a$  und  $b$  sind äquivalent“
- ▶ Beispiel: „ $f$  ist bijektiv genau dann,  
wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist“
- ▶ erzeugbar aus  $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

$a$	$b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

# Rangfolge und Rechenregeln

## Rangfolge:

- ▶ NICHT vor UND
- ▶ UND vor ODER

## Beispiel

$$\neg 0 \vee 1 \wedge 0 = (\neg 0) \vee (1 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$$

## De Morgan-Gesetze:

- ▶  $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
- ▶  $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

# Logische Ausdrücke in Pseudocode und C

- ▶ logische Variablen: `bool a,b;`
- ▶ logische Werte: `true` und `false`
- ▶ NOT Operator: `!a`
- ▶ AND Operator: `a && b`
- ▶ OR Operator: `a || b`

## Beispiele:

- ▶ `( (2 == 2) && (3 < 1) )`  
ergibt `(true && false)`, also `false`
- ▶ `( !(2 == 2) || (3 > 1) )`  
ergibt `(false || true)`, also `true`
- ▶ Kurzform für `!(2 == 2)` ist `(2 != 2)`

# Logische Ausdrücke in Pseudocode und C

- ▶ logische Variablen: `bool a,b;`
- ▶ logische Werte: `true` und `false`
- ▶ NOT Operator: `!a`
- ▶ AND Operator: `a && b`
- ▶ OR Operator: `a || b`

## Beispiele:

- ▶ `( (2 == 2) && (3 < 1) )`  
ergibt `(true && false)`, also `false`
- ▶ `( !(2 == 2) || (3 > 1) )`  
ergibt `(false || true)`, also `true`
- ▶ Kurzform für `!(2 == 2)` ist `(2 != 2)`

# Logische Ausdrücke in Pseudocode und C

- ▶ logische Variablen: `bool a,b;`
- ▶ logische Werte: `true` und `false`
- ▶ NOT Operator: `!a`
- ▶ AND Operator: `a && b`
- ▶ OR Operator: `a || b`

## Beispiele:

- ▶ `( (2 == 2) && (3 < 1) )`  
ergibt `(true && false)`, also `false`
- ▶ `( !(2 == 2) || (3 > 1) )`  
ergibt `(false || true)`, also `true`
- ▶ Kurzform für `!(2 == 2)` ist `(2 != 2)`

# Logische Ausdrücke in Pseudocode und C

- ▶ logische Variablen: `bool a,b;`
- ▶ logische Werte: `true` und `false`
- ▶ NOT Operator: `!a`
- ▶ AND Operator: `a && b`
- ▶ OR Operator: `a || b`

## Beispiele:

- ▶ `( (2 == 2) && (3 < 1) )`  
ergibt `(true && false)`, also `false`
- ▶ `( !(2 == 2) || (3 > 1) )`  
ergibt `(false || true)`, also `true`
- ▶ Kurzform für `!(2 == 2)` ist `(2 != 2)`

# Was sind primitive Datentypen?

## Primitive Datentypen

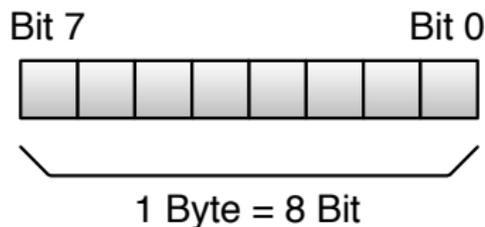
Wir bezeichnen grundlegende, in Programmiersprachen eingebaute Datentypen als **primitive Datentypen**.

Durch Kombination von primitiven Datentypen lassen sich **zusammengesetzte Datentypen** bilden.

Beispiele für primitive Datentypen in C:

- ▶ **int** für ganze Zahlen
- ▶ **float** für floating point Zahlen
- ▶ **bool** für logische Werte

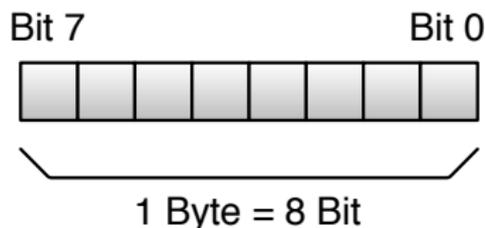
# Bits und Bytes



**Bytes** als Maßeinheit für Speichergrößen (nach IEC, **traditionell**):

- ▶  $2^{10}$  Bytes = 1024 Bytes = 1 KiB, ein **Kilo Byte** (Kibi Byte)
- ▶  $2^{20}$  Bytes = 1 MiB, ein **Mega Byte** (bzw. MebiByte)
- ▶  $2^{30}$  Bytes = 1 GiB, ein **Giga Byte** (bzw. GibiByte)
- ▶  $2^{40}$  Bytes = 1 TiB, ein **Tera Byte** (bzw. TebiByte)
- ▶  $2^{50}$  Bytes = 1 PiB, ein **Peta Byte** (bzw. PebiByte)
- ▶  $2^{60}$  Bytes = 1 EiB, ein **Exa Byte** (bzw. ExbiByte)

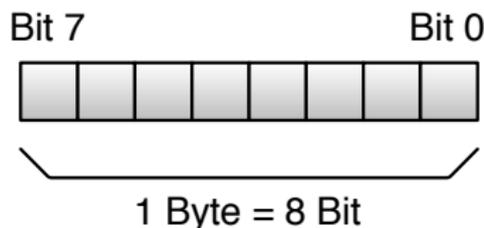
# Bits und Bytes



**Bytes** als Maßeinheit für Speichergrößen (nach IEC, **metrisch**):

- ▶  $10^3$  Bytes = 1000 Bytes = 1 kB, ein **kilo Byte** (großes B)
- ▶  $10^6$  Bytes = 1 MB, ein **Mega Byte**
- ▶  $10^9$  Bytes = 1 GB, ein **Giga Byte**
- ▶  $10^{12}$  Bytes = 1 TB, ein **Tera Byte**
- ▶  $10^{15}$  Bytes = 1 PB, ein **Peta Byte**
- ▶  $10^{18}$  Bytes = 1 EB, ein **Exa Byte**

# Bits und Bytes



**Bytes** als Maßeinheit für Speichergrößen (nach IEC, **metrisch**):

- ▶  $10^3$  Bytes = 1000 Bytes = 1 kB, ein **kilo Byte** (großes B)
- ▶  $10^6$  Bytes = 1 MB, ein **Mega Byte**
- ▶  $10^9$  Bytes = 1 GB, ein **Giga Byte**
- ▶  $10^{12}$  Bytes = 1 TB, ein **Tera Byte**
- ▶  $10^{15}$  Bytes = 1 PB, ein **Peta Byte**
- ▶  $10^{18}$  Bytes = 1 EB, ein **Exa Byte**

**Hinweis:** auch Bits werden als Maßangabe verwendet, z.B. 16 Mbit oder 16 Mb (kleines b).

# Primitive Datentypen in C-ähnlichen Sprachen

Wir betrachten im Detail **primitive Datentypen** für:

1. natürliche Zahlen (*unsigned integers*)
2. ganze Zahlen (*signed integers*)
3. floating point Zahlen (*floats*)

# Zahldarstellung

## Dezimalsystem:

- ▶ Basis  $b = 10$
- ▶ Koeffizienten  $c_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- ▶ Beispiel:  $123_{10} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

## Binärsystem:

- ▶ Basis  $b = 2$
- ▶ Koeffizienten  $c_n \in \{0, 1\}$
- ▶ Beispiel:  $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$

# Zahldarstellung

## Dezimalsystem:

- ▶ Basis  $b = 10$
- ▶ Koeffizienten  $c_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- ▶ Beispiel:  $123_{10} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

## Binärsystem:

- ▶ Basis  $b = 2$
- ▶ Koeffizienten  $c_n \in \{0, 1\}$
- ▶ Beispiel:  $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$

# Zahldarstellung

## Oktalsystem:

- ▶ Basis  $b = 8 (= 2^3)$
- ▶ Koeffizienten  $c_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ▶ Beispiel:  $173_8 = 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 123_{10}$

## Hexadezimalsystem:

- ▶ Basis  $b = 16 (= 2^4)$
- ▶ Koeffizienten  $c_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$
- ▶ Beispiel:  $7B_{16} = 7 \cdot 16^1 + B \cdot 16^0 = 123_{10}$

# Wie viele Ziffern pro Zahl?

## Problem

Gegeben Zahl  $z \in \mathbb{N}$ , wie viele Ziffern  $m$  werden bezüglich Basis  $b$  benötigt?

**Lösung:**  $m = \lfloor \log_b(z) \rfloor + 1$

**Erläuterung:** ( $a \in \mathbb{R}$ )

- ▶  $\lfloor a \rfloor = \text{floor}(a) =$  größte ganze Zahl kleiner gleich  $a$
- ▶  $\lceil a \rceil = \text{ceil}(a) =$  kleinste ganze Zahl größer gleich  $a$

$$a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a \leq \lceil a \rceil < a + 1$$

- ▶  $\log_b(z) = \frac{\ln(z)}{\ln(b)}$ , wobei „ln“ der natürliche Logarithmus ist

# Wie viele Ziffern pro Zahl?

**Lösung:**  $m = \lfloor \log_x(z) \rfloor + 1$

**Beispiele:**  $z = 123$

- ▶ Basis  $b = 10$ :  $m = \lfloor \log_{10}(123) \rfloor + 1 = \lfloor 2.0899\dots \rfloor + 1 = 3$
- ▶ Basis  $b = 2$ :  $m = \lfloor \log_2(123) \rfloor + 1 = \lfloor 6.9425\dots \rfloor + 1 = 7$
- ▶ Basis  $b = 8$ :  $m = \lfloor \log_8(123) \rfloor + 1 = \lfloor 2.3141\dots \rfloor + 1 = 3$
- ▶ Basis  $b = 16$ :  $m = \lfloor \log_{16}(123) \rfloor + 1 = \lfloor 1.7356\dots \rfloor + 1 = 2$

# Größte Zahl pro Anzahl Ziffern?

## Problem

Gegeben Basis  $b$  und  $m$  Ziffern, was ist die größte darstellbare Zahl?

**Lösung:**  $z_{max} = x^m - 1$

## Beispiele:

- ▶  $b = 2, m = 4: z_{max} = 2^4 - 1 = 15 = 1111_2$
- ▶  $b = 2, m = 8: z_{max} = 2^8 - 1 = 255 = 11111111_2$
- ▶  $b = 16, m = 2: z_{max} = 16^2 - 1 = 255 = FF_{16}$

# Natürliche Zahlen in C-ähnlichen Sprachen

## Natürliche Zahlen

In Computern verwendet man **Binärdarstellung** mit einer fixen Anzahl Ziffern (genannt **Bits**).

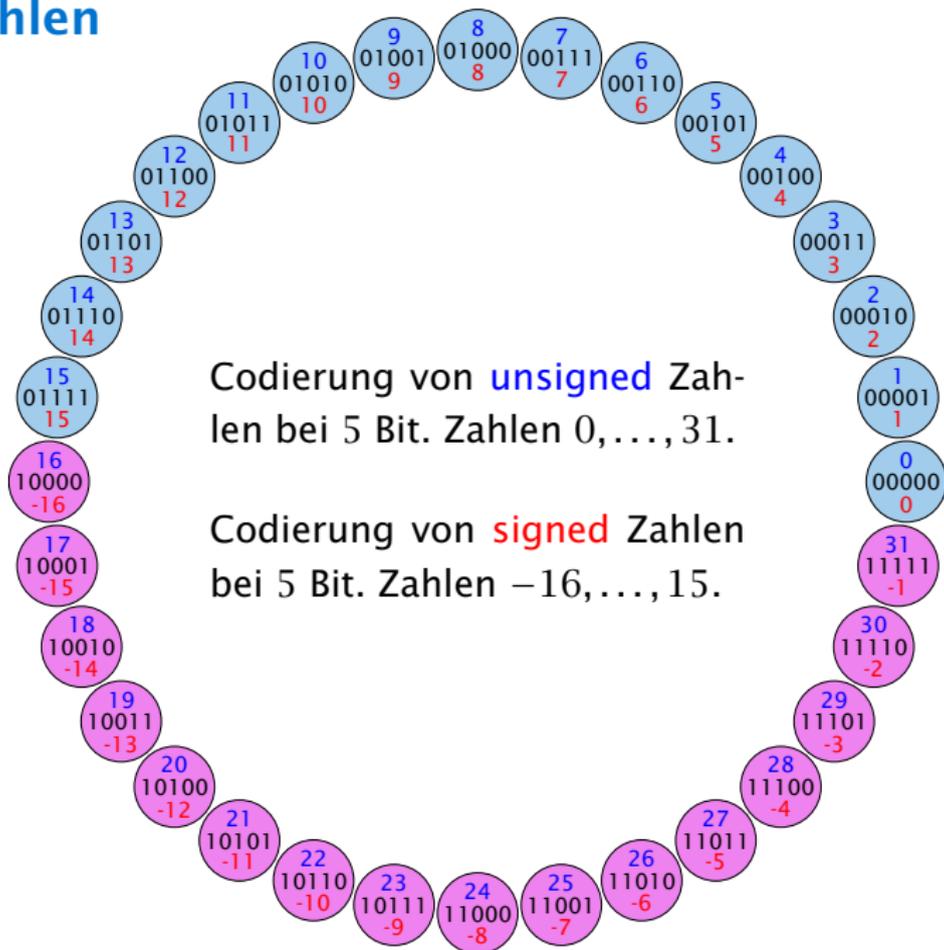
Die **primitiven Datentypen** für **natürliche Zahlen** sind:

- ▶ **8 Bits** (ein **Byte**), darstellbare Zahlen:  $\{0, \dots, 255\}$   
in C: **unsigned char**
- ▶ **16 Bits**, darstellbare Zahlen:  $\{0, \dots, 65\,535\}$   
in C: **unsigned short**
- ▶ **32 Bits**, darstellbare Zahlen:  $\{0, \dots, 4\,294\,967\,295\}$   
in C: **unsigned long**
- ▶ **64 Bits**, darstellbare Zahlen:  $\{0, \dots, 2^{64} - 1\}$   
in C: **unsigned long long**

# Negative Zahlen



# Negative Zahlen



# Negative Zahlen

## Bitfolge

$$x = \langle x_{n-1}, \dots, x_0 \rangle$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array}$$

$$x = \langle x_{n-1}, \dots, x_0 \rangle$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{f_{\text{ZK}}} \\ \xleftarrow{f_{\text{ZK}}^{-1}} \end{array}$$

## Zahl

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$$

$$-x_{n-1} 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$$

# Negative Zahlen

## Definition

In **2-Komplement Darstellung** mit  $n$  bits repräsentiert die Bitfolge

$$x = \langle x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0 \rangle$$

die Zahl  $f_{\text{ZK}}(x) = -x_{n-1}2^n + \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$ .

## Beobachtungen

- ▶ Zahlen mit  $x_{n-1} = 1$  sind negativ; andere positiv (Vorzeichenbit)
- ▶ positive Zahlen:  $0, \dots, 2^{n-1} - 1$   
negative Zahlen:  $-1, \dots, -2^{n-1}$
- ▶  $f_{\text{ZK}}(x) = -x_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$ .

# Negative Zahlen

## Vorzeichenwechsel

Sei  $x = \langle x_{n-1}, \dots, x_0 \rangle$  ein Bitfolge mit  $\langle x_{n-2}, \dots, x_0 \rangle \neq \langle 0, \dots, 0 \rangle$ .

Die Repräsentation für die Zahl  $-f_{\text{ZK}}(x)$  im **2er Komplement** (d.h.  $f_{\text{ZK}}^{-1}(-f_{\text{ZK}}(x))$ ) erhält man durch

$$f^{-1}(f(\bar{x}) + 1)$$

wobei  $\bar{x} = \langle \bar{x}_{n-1}, \dots, \bar{x}_0 \rangle$  die invertierte Bitfolge bezeichnet.

D.h. man invertiert die Bitfolge und addiert **1** auf die sich ergebende Zahl.

# Negative Zahlen

## Beweis

1. Fall:  $x_{n-1} = 1$ , d.h.  $f_{ZK}(x)$  negativ

$$\begin{aligned} -f_{ZK}(x) &= 2^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (1 - x_i) 2^i = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{x}_i 2^i \\ &= 1 + f(\bar{x}) \end{aligned}$$

Da  $1 + f(\bar{x}) < 2^{n-1}$  liefert Anwendung von  $f^{-1}$  oder  $f_{ZK}^{-1}$  die gleiche Bitfolge.

# Negative Zahlen

## Beweis

2. Fall:  $x_{n-1} = 0$ , d.h.  $f_{ZK}(x)$  strikt positiv

$$\begin{aligned} -f_{ZK}(x) &= -\sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} (1 - x_i) 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} 2^i - 1 + 1 \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{x}_i 2^i - 2^n = 1 + f(\bar{x}) - 2^n \end{aligned}$$

Für eine Zahl  $z$  die das höchstwertige Bit  $n - 1$  gesetzt hat gilt  $f_{ZK}^{-1}(z - 2^n) = f^{-1}(z)$ . Dies gilt für  $1 + f(\bar{x})$ .

# Negative Zahlen

## Definition

Die Restklasse  $[a]_m$  enthält alle  $z \in \mathbb{Z}$  die bei Division durch  $m$  den gleichen Rest lassen.

$a$  heißt Repräsentant der Restklasse. Eine Restklasse hat viele verschiedene Repräsentanten.

Für eine Restklasse  $M \subseteq \mathbb{Z}$  nennen wir  $a \in M$  mit  $0 \leq a < m$  den Standardrepräsentanten der Restklasse.

## Beispiel

►  $[2]_8 = [42]_8 = [-78]_8$

# Negative Zahlen

## Rechnen mit Restklassen

Man kann mit Restklassen rechnen. Die Multiplikation / Addition / Subtraktion etc. wird **repräsentantenweise** ausgeführt. **Die Wahl des Repräsentanten ist unwichtig!!!!!!!!!!**

## Beispiele:

- ▶  $[2]_8 \cdot [7]_8 = [2 \cdot 7]_8 = [6]_8$
- ▶  $[-6]_8 \cdot [23]_8 = [-6 \cdot 23]_8 = [-138]_8 = [-18]_8 = [6]_8$
- ▶  $[7]_8 + [8]_8 = [15]_8 = [-1]_8$

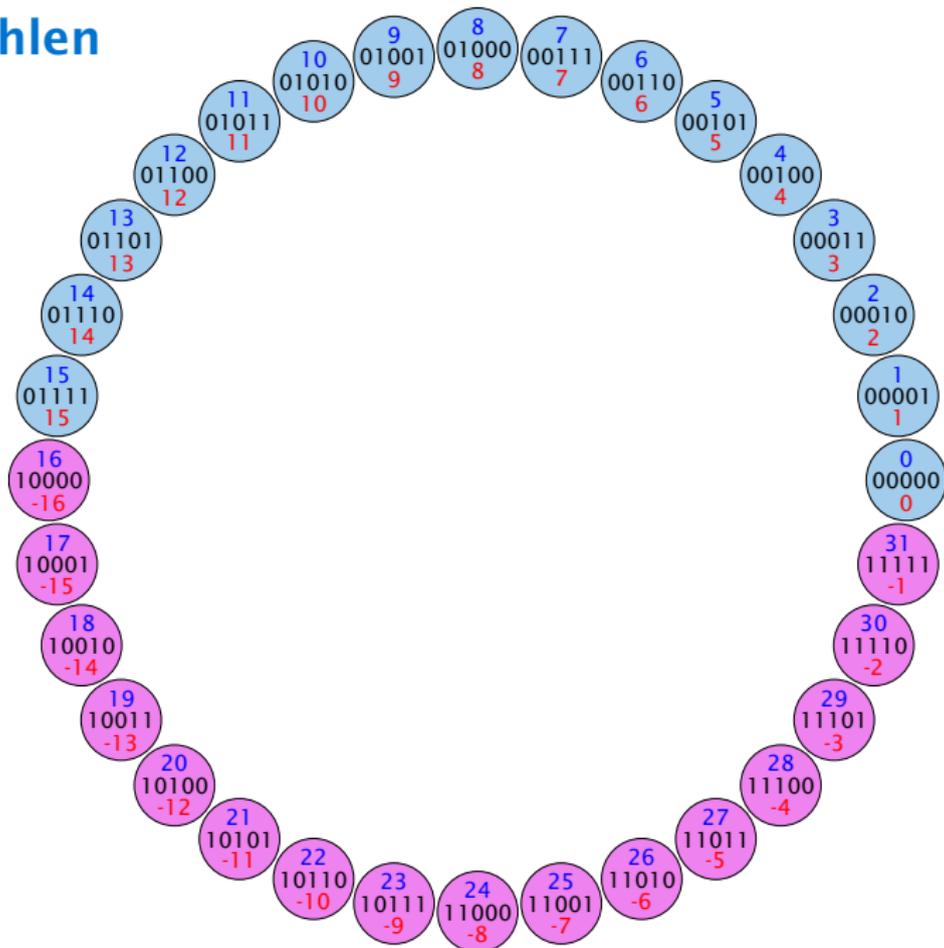
# Negative Zahlen

Die Hardware Implementierung von Addition / Multiplikation etc. implementiert eigentlich eine Operation auf Restklassen modulo  $2^n$ , wobei  $n$  der Bitlänge entspricht.

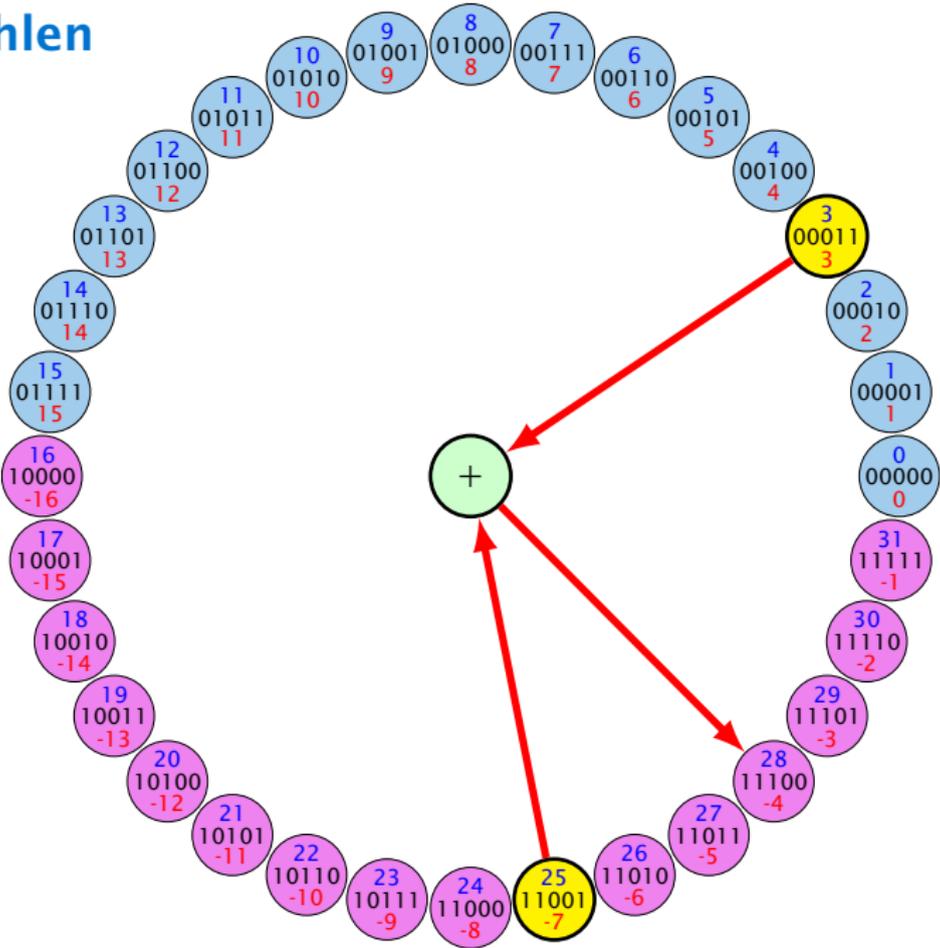
Im Prinzip wird eine Operation (Addition / Subtraktion / Multiplikation / Ganzzahldivision) ausgeführt, und dann werden überzählige Bits verworfen (d.h., dass Ergebnis wird modulo  $2^n$  genommen).

Durch das Verwenden des 2er-Komplements kann man für signed und unsigned Datentypen, (im wesentlichen) die gleiche Hardware benutzen.

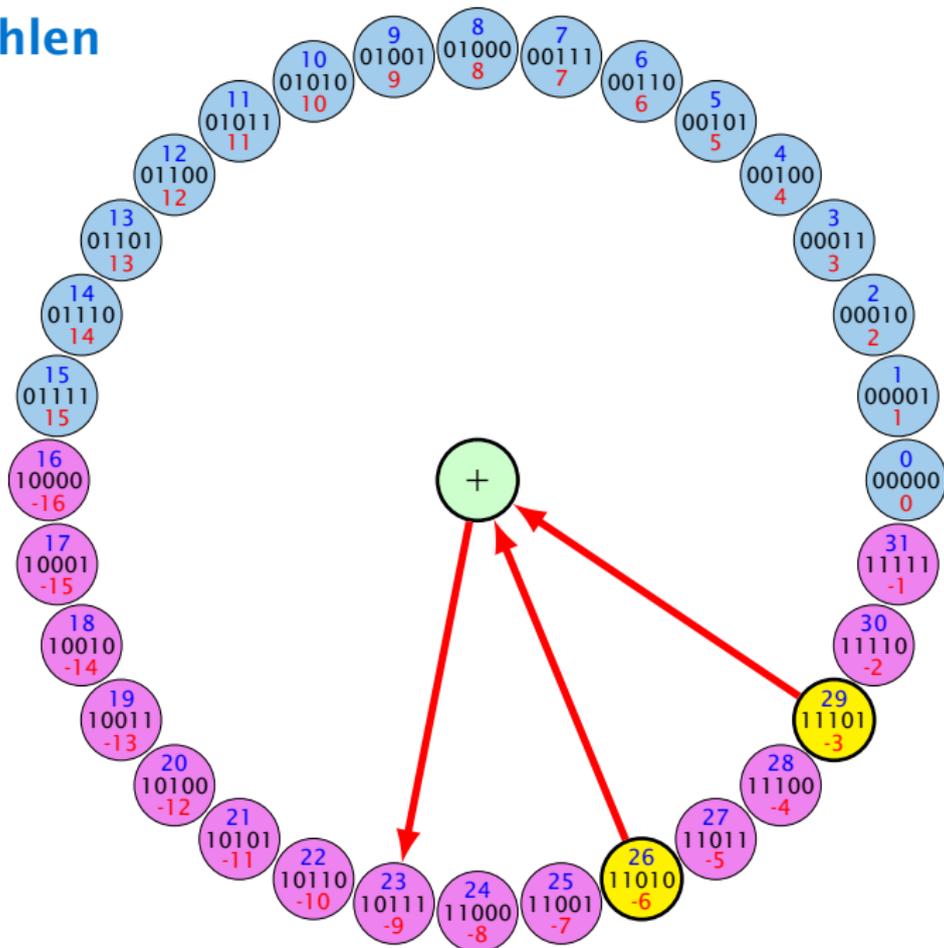
# Negative Zahlen



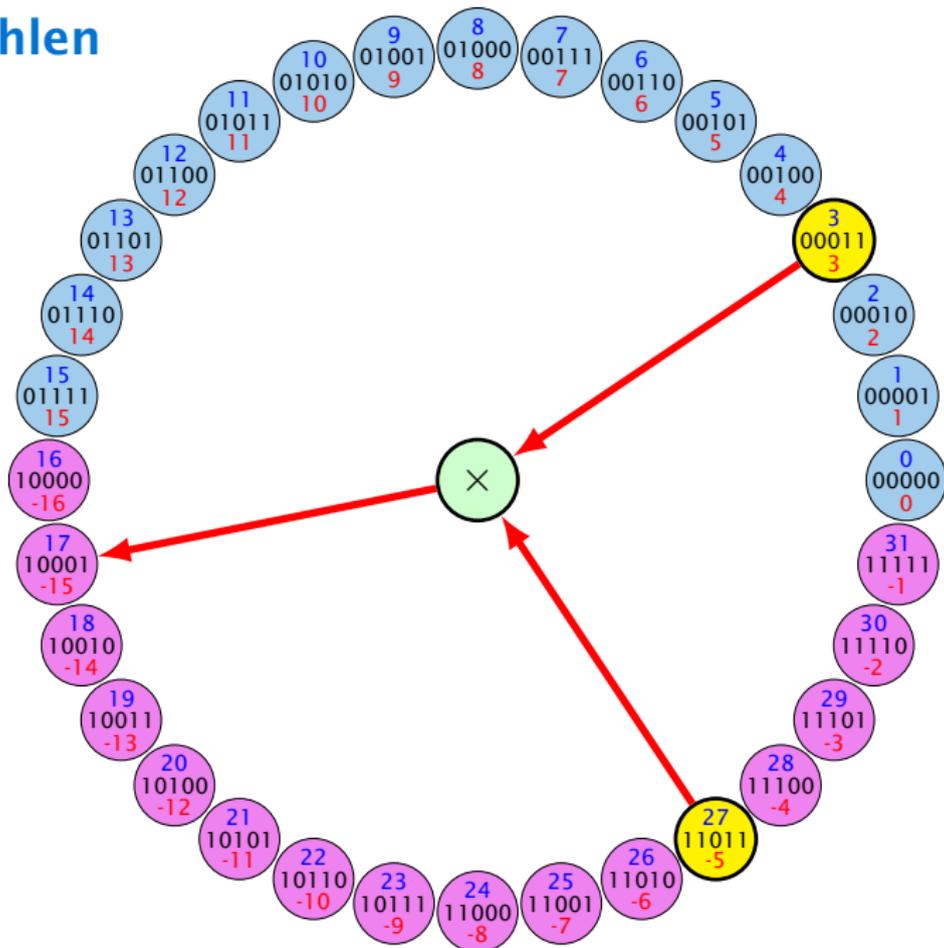
# Negative Zahlen



# Negative Zahlen



# Negative Zahlen



# Ganze Zahlen in C-ähnlichen Sprachen

## Ganze Zahlen:

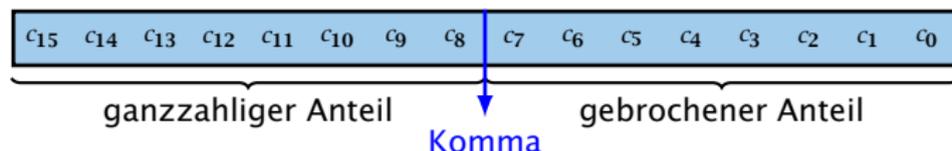
Die primitiven Datentypen für ganze Zahlen sind:

- ▶ **8 Bits:** unsigned char  $\{0, \dots, 255\}$   
signed char  $\{-128, \dots, 127\}$
- ▶ **16 Bits:** unsigned short  $\{0, \dots, 65535\}$   
signed short  $\{-32768, \dots, 32767\}$
- ▶ **32 Bits:** unsigned long  $\{0, \dots, 2^{32} - 1\}$   
signed long  $\{-2^{31}, \dots, 2^{31} - 1\}$
- ▶ **64 Bits:** unsigned long long  $\{0, \dots, 2^{64} - 1\}$   
signed long long  $\{-2^{63}, \dots, 2^{63} - 1\}$
- ▶ signed kann weggelassen werden (ausser bei char!)
- ▶ unsigned int und signed int sind je nach System 16, 32 oder 64 Bit

# Rationale Zahlen I

**Festkommadarstellung:** Komma an fester Stelle in Zahl

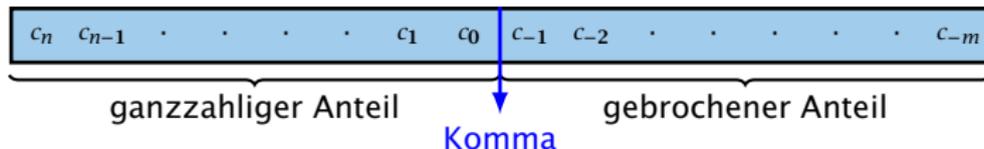
Beispiel mit  $n = 16$ :



Nachteile:

- ▶ weniger große Zahlen darstellbar
- ▶ feste Genauigkeit der Nachkommastellen

# Rationale Zahlen II



**Interpretation** für  $r \in \mathbb{Q}$ :

$$r = c_n \cdot 2^n + \dots + c_0 \cdot 2^0 + c_{-1} 2^{-1} + \dots + c_{-m} \cdot 2^{-m}$$

mit  $n + 1$  Vorkomma- und  $m$  Nachkommaziffern

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} 11.01_2 &= 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 2 + 1 + 0 + \frac{1}{4} = 3.25_{10} \end{aligned}$$

# Floating Point Zahlen I

**Wissenschaftliche Notation:**  $x = a \cdot 10^b$  für  $x \in \mathbb{R}$ , wobei:

- ▶  $a \in \mathbb{R}$  mit  $1 \leq |a| < 10$
- ▶  $b \in \mathbb{Z}$

## Beispiele:

- ▶  $-2.7315 \cdot 10^2$  °C      absoluter Nullpunkt
- ▶  $1.5 \cdot 10^9$  Hz              Taktfrequenz A8X Prozessor

## Drei Bestandteile:

- ▶ Vorzeichen
- ▶ Mantisse  $|a|$  (bestimmt die Genauigkeit)
- ▶ Exponent  $b$  (bestimmt Größe des Wertebereichs)

**Problem:** bei fester Länge der Mantisse (z.B. 3 Ziffern)

- ▶ zwischen  $1.23 \cdot 10^4 = 12300$  und  $1.24 \cdot 10^4 = 12400$  keine Zahl darstellbar!

# Floating Point Zahlen II



- ▶ wissenschaftliche Darstellung mit Basis 2

$$f = (-1)^V \cdot (1 + M) \cdot 2^{E-bias}$$

- ▶ Vorzeichen Bit  $V$
- ▶ Mantisse  $M$  hat immer die Form  $1.abc$ , also wird erste Stelle weggelassen („hidden bit“)
- ▶ Exponent  $E$  wird vorzeichenlos abgespeichert, verschoben um  $bias$ 
  - ▶ bei 32 bit:  $bias = 127$ , bei 64 bit:  $bias = 1023$

# Floating Point Zahlen III

## Übliche Floating Point Formate:

<i>Bit</i>	<i>Vorz.</i>	<i>Exp.</i>	<i>Mant.</i>	<i>Dezimal stellen</i>	<i>Bereich</i>
32	1 Bit	8 Bit	23 Bit	~ 7	$\pm 2 \cdot 10^{-38}$ bis $\pm 2 \cdot 10^{38}$
64	1 Bit	11 Bit	52 Bit	~ 15	$\pm 2 \cdot 10^{-308}$ bis $\pm 2 \cdot 10^{308}$
80	1 Bit	15 Bit	64 Bit	~ 19	$\pm 1 \cdot 10^{-4932}$ bis $\pm 1 \cdot 10^{4932}$

In C:

`float` (32 Bit), `double` (64 Bit), `long double` (80 Bit)

# Vorsicht mit Floating Point!

Floating Point Zahlen sind bequem, aber **Vorsicht!**

- ▶ Viele Dezimalzahlen haben keine Floating Point Darstellung
  - ▶ Beispiel:  $0.1_{10} = 0.0001100110011\dots_2$  (periodisch)
- ▶ Durch feste Länge der Mantisse sind ebenfalls viele Zahlen nicht darstellbar
  - ▶ Beispiel: mit 3 Ziffern Mantisse ist zwischen  $1.23 \cdot 10^4 = 12300$  und  $1.24 \cdot 10^4 = 12400$  keine Zahl darstellbar!
- ▶ Kritisch sind Vergleiche von Floating Point Zahlen
  - ▶ Beispiel:  $(0.1 + 0.2 == 0.3)$  ist meist **FALSE!**
- ▶ Zins-Berechnungen und dergleichen **NIE** mit Floating Point Zahlen!
  - ▶ Stattdessen: spezielle Bibliotheken wie GMP

# Vorsicht mit Floating Point!

Floating Point Zahlen sind bequem, aber **Vorsicht!**

- ▶ Viele Dezimalzahlen haben keine Floating Point Darstellung
  - ▶ Beispiel:  $0.1_{10} = 0.0001100110011\dots_2$  (periodisch)
- ▶ Durch feste Länge der Mantisse sind ebenfalls viele Zahlen nicht darstellbar
  - ▶ Beispiel: mit 3 Ziffern Mantisse ist zwischen  $1.23 \cdot 10^4 = 12300$  und  $1.24 \cdot 10^4 = 12400$  keine Zahl darstellbar!
- ▶ Kritisch sind Vergleiche von Floating Point Zahlen
  - ▶ Beispiel:  $(0.1 + 0.2 == 0.3)$  ist meist **FALSE!**
- ▶ Zins-Berechnungen und dergleichen **NIE** mit Floating Point Zahlen!
  - ▶ Stattdessen: spezielle Bibliotheken wie GMP

# Vorsicht mit Floating Point!

Floating Point Zahlen sind bequem, aber **Vorsicht!**

- ▶ Viele Dezimalzahlen haben keine Floating Point Darstellung
  - ▶ Beispiel:  $0.1_{10} = 0.0001100110011\dots_2$  (periodisch)
- ▶ Durch feste Länge der Mantisse sind ebenfalls viele Zahlen nicht darstellbar
  - ▶ Beispiel: mit 3 Ziffern Mantisse ist zwischen  $1.23 \cdot 10^4 = 12300$  und  $1.24 \cdot 10^4 = 12400$  keine Zahl darstellbar!
- ▶ Kritisch sind Vergleiche von Floating Point Zahlen
  - ▶ Beispiel:  $(0.1 + 0.2 == 0.3)$  ist meist **FALSE!**
- ▶ Zins-Berechnungen und dergleichen **NIE** mit Floating Point Zahlen!
  - ▶ Stattdessen: spezielle Bibliotheken wie GMP

# Vorsicht mit Floating Point!

Floating Point Zahlen sind bequem, aber **Vorsicht!**

- ▶ Viele Dezimalzahlen haben keine Floating Point Darstellung
  - ▶ Beispiel:  $0.1_{10} = 0.0001100110011\dots_2$  (periodisch)
- ▶ Durch feste Länge der Mantisse sind ebenfalls viele Zahlen nicht darstellbar
  - ▶ Beispiel: mit 3 Ziffern Mantisse ist zwischen  $1.23 \cdot 10^4 = 12300$  und  $1.24 \cdot 10^4 = 12400$  keine Zahl darstellbar!
- ▶ Kritisch sind Vergleiche von Floating Point Zahlen
  - ▶ Beispiel:  $(0.1 + 0.2 == 0.3)$  ist meist **FALSE!**
- ▶ Zins-Berechnungen und dergleichen **NIE** mit Floating Point Zahlen!
  - ▶ Stattdessen: spezielle Bibliotheken wie GMP

# Definition Datenstruktur

## Definition Datenstruktur (nach Prof. Eckert)

Eine Datenstruktur ist eine

- ▶ **logische Anordnung** von Datenobjekten,
- ▶ die **Informationen** repräsentieren,
- ▶ den **Zugriff** auf die repräsentierte Information über **Operationen** auf Daten ermöglichen und
- ▶ die Information **verwalten**.

Zwei Hauptbestandteile:

- ▶ **Datenobjekte**  
z.B. definiert über primitive Datentypen
- ▶ **Operationen** auf den Objekten  
z.B. definiert als Funktionen

# Primitive Datentypen in C

Natürliche Zahlen, z.B. `unsigned short`, `unsigned long`

- ▶ Wertebereich: bei  $n$  Bit von 0 bis  $2^n - 1$
- ▶ Operationen: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, `!=`, `>`

Ganze Zahlen, z.B. `int`, `long`

- ▶ Wertebereich: bei  $n$  Bit von  $-2^{n-1}$  bis  $2^{n-1} - 1$
- ▶ Operationen: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, `!=`, `>`

Floating Point Zahlen, z.B. `double`, `float`

- ▶ Wertebereich: abhängig von Größe
- ▶ Operationen: `+`, `-`, `*`, `/`, `<`, `==`, `!=`, `>`

Logische Werte, `bool`

- ▶ Wertebereich: `true`, `false`
- ▶ Operationen: `&&`, `||`, `!`, `==`, `!=`

# Definition Feld

## Definition Feld

Ein **Feld**  $F$  ist eine Folge von  $n$  Datenelementen  $(d_i)_{i=1,\dots,n}$ ,

$$F = d_1, d_2, \dots, d_n$$

mit  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Die Datenelemente  $d_i$  sind beliebige Datentypen (z.B. primitive).

## Beispiele:

- ▶  $F$  sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 10, aufsteigend geordnet:

$$F = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

- ▶ Ist  $n = 0$ , so ist das Feld leer.

# Definition Feld

## Operationen

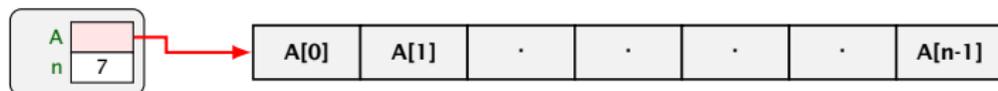
- ▶ `F.initialize()`: initialisiere leeres Feld `A`
- ▶ `F.elementAt(i)`: Zugriff auf `i`-tes Element von `A`.  
`i` muss zwischen `1` und `F.size()` liegen.
- ▶ `F.insert(d, i)`: füge Element `d` an Position `i` in Feld `A` ein.  
`i` muss zwischen `1` und `F.size()+1` liegen
- ▶ `F.erase(i)`: entferne `i`-tes Element aus Feld `A`.
- ▶ `F.size()`: gibt die Anzahl der Elemente des Feldes zurück

Ein abstrakter Datentyp wird im wesentlichen durch die auf ihn anwendbaren Operationen definiert.

# Feld als Array

## Repräsentation von Feld durch Array der Länge $n$

- ▶ Datenelemente werden in Array gespeichert
- ▶ einfacher Zugriff über index-operator ( $A[i]$ )
- ▶ Hinzufügen/Löschen schwierig...



**Achtung:** Indizierung des Arrays startet bei 0!  
 $A[i]$  enthält Element  $i+1$  des Feldes

# Eigenschaften von Arrays

Feld  $F$  mit Länge  $n$  als Array

## Vorteile:

- ▶ direkter Zugriff auf Elemente in konstanter Zeit mittels  $A[i]$
- ▶ sequentielles Durchlaufen sehr einfach

## Nachteile:

- ▶ Verlängern des Feldes aufwendig
- ▶ Hinzufügen und Löschen von Elementen aufwendig

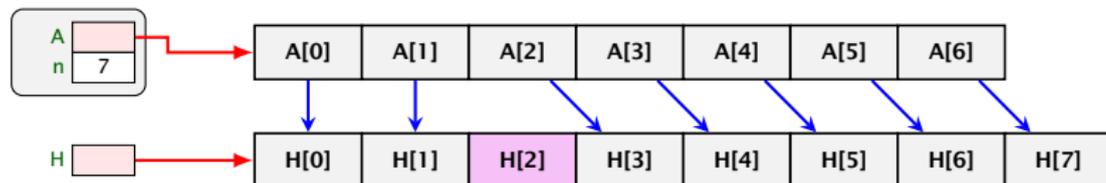
# Hinzufügen eines Elementes

**Gegeben:** Feld  $F$ , Länge  $n$ , via Array implementiert

**Gewünscht:** Feld  $F$ , zusätzliches Element  $d_i$  an Position  $i$ ;  
Elemente an Positionen  $\geq i$  werden auf nächsthöhere Position  
verschoben

- ▶ neuen Speicher der Größe  $n+1$  reservieren
- ▶ altes Array in neuen Speicher kopieren

**Beispiel:**  $F.insert(12, 3)$  (einfügen an Position 3)



## Implementierung: Feld via Array

```
3 class Feld {
4     int n;
5     int* A;
6
7     public:
8     Feld() {
9         n = 0;
10        A = new int[n];
11    }
```

## Implementierung: Feld via Array

```
13 void insert(int d, int i) {
14     int* H = new int[n+1];
15     for (int j=0; j<i-1; j++) {
16         H[j] = A[j];
17     }
18     H[i-1] = d;
19     for (int j=i-1; j<n; j++) {
20         H[j+1] = A[j];
21     }
22     delete[] A;
23     A = H;
24     n++;
25 }
```

## Implementierung: Feld via Array

```
27 void erase(int i) {
28     int* H = new int[n-1];
29     for (int j=0; j<i-1; j++) {
30         H[j] = A[j];
31     }
32     for (int j=i; j<n; j++) {
33         H[j-1] = A[j];
34     }
35     delete[] A;
36     A = H;
37     n--;
38 }
```

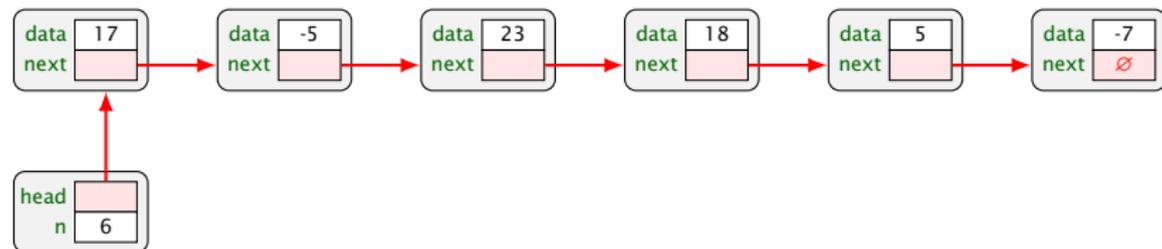
## Implementierung: Feld via Array

```
40     int elementAt(int i) {  
41         return A[i-1];  
42     }  
43  
44     int size() {  
45         return n;  
46     }  
47 };
```

# Feld als einfach verkettete Liste

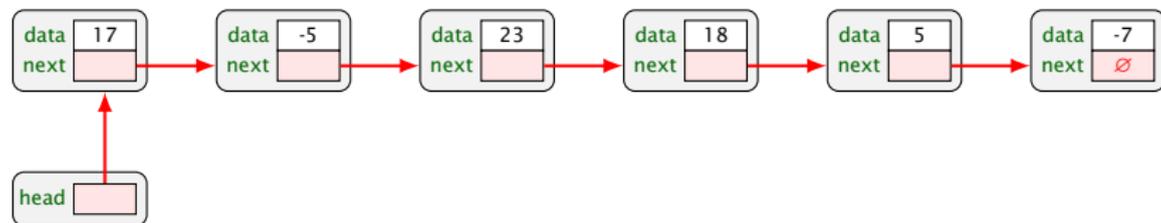
## Repräsentation von Feld als verkettete Liste

- ▶ dynamische Anzahl von Datenelementen
- ▶ in linearer Reihenfolge gespeichert (nicht notwendigerweise zusammenhängend!)
- ▶ mit Referenzen oder Zeigern verkettet



auf Englisch: *linked list*

# Verkettete Liste



Folge von miteinander verbundenen Elementen

jedes Element besteht aus

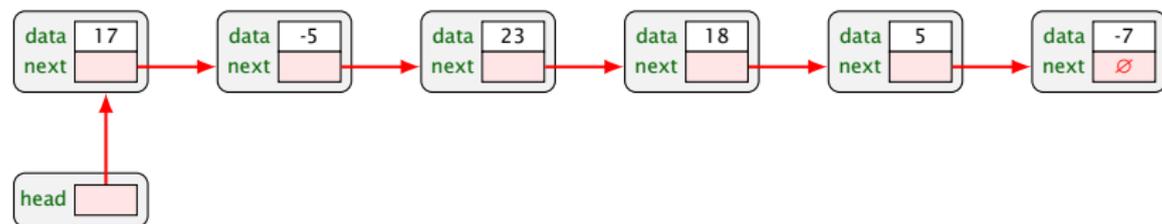
- ▶ **data:** Wert des Feldes an Position  $i$
- ▶ **next:** Referenz auf das nächste Element

head ist Referenz auf erstes Element der Liste

letztes Element hat keinen Nachfolger

- ▶ symbolisiert durch **null**-Referenz

# Verkettete Liste



Folge von miteinander verbundenen Elementen

jedes Element besteht aus

- ▶ **data**: Wert des Feldes an Position  $i$
- ▶ **next**: Referenz auf das nächste Element

**head** ist Referenz auf erstes Element der Liste

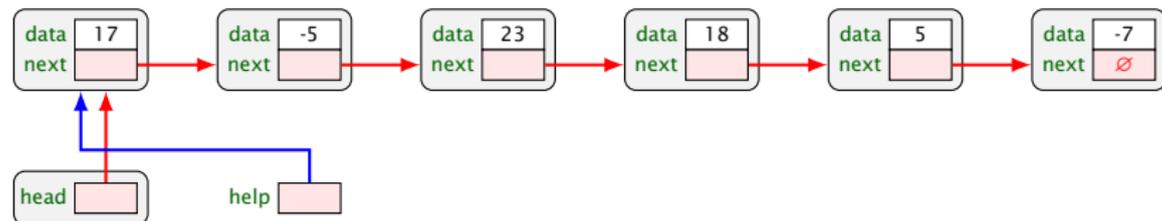
letztes Element hat keinen Nachfolger

- ▶ symbolisiert durch **null**-Referenz

# Verketteter Liste – Zugriff auf Element

## Zugriff auf Element i:

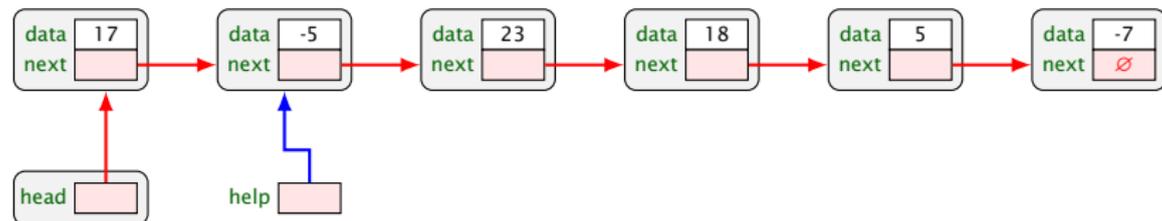
- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum **i**-ten Element



# Verketteter Liste – Zugriff auf Element

## Zugriff auf Element i:

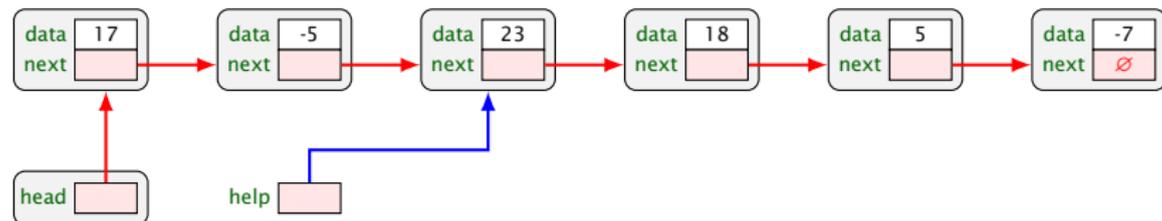
- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum **i**-ten Element



# Verketteter Liste – Zugriff auf Element

## Zugriff auf Element i:

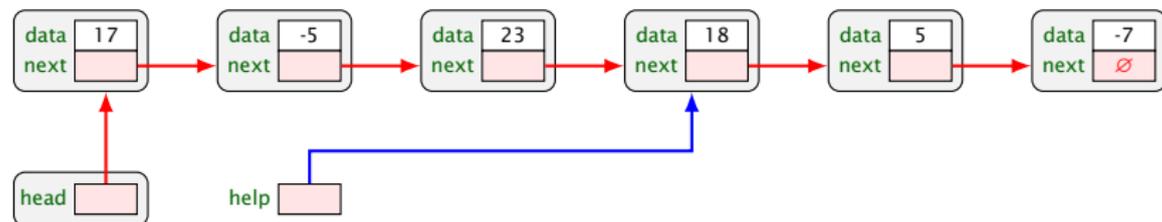
- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum **i**-ten Element



# Verketteter Liste – Zugriff auf Element

## Zugriff auf Element i:

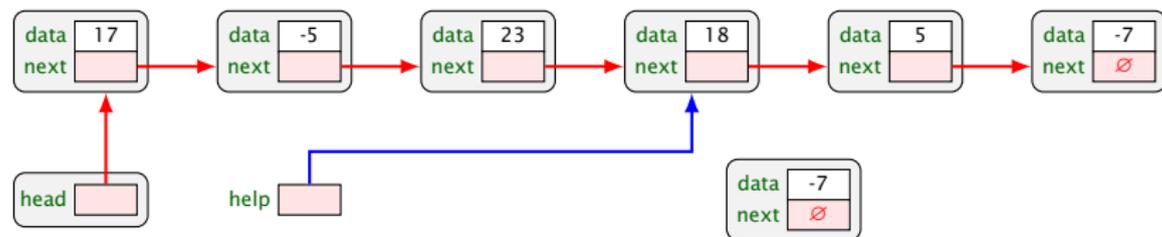
- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum **i**-ten Element



# Verketteter Liste – Einfügen nach Referenz

## Einfügen nach Element i:

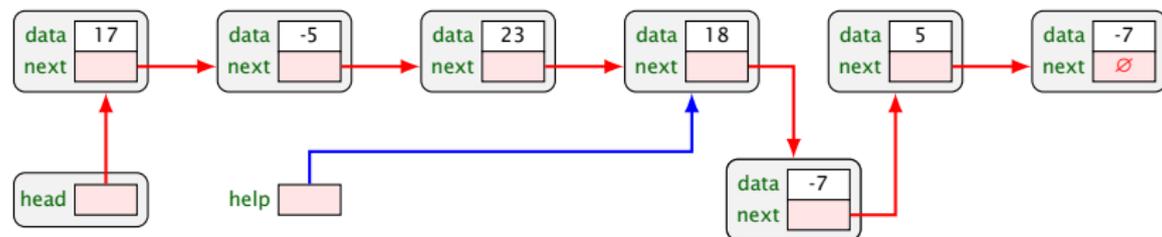
- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum **i-1**-ten Element
- ▶ Referenzen umsetzen



# Verketteter Liste – Einfügen nach Referenz

## Einfügen nach Element i:

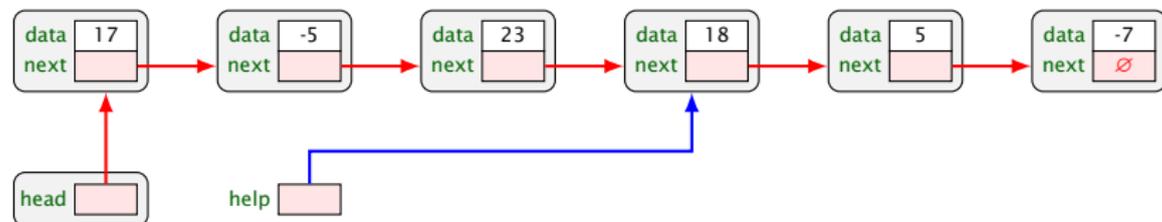
- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum **i-1**-ten Element
- ▶ Referenzen umsetzen



# Verketteter Liste – Löschen nach Referenz

## Einfügen nach Element $i$ :

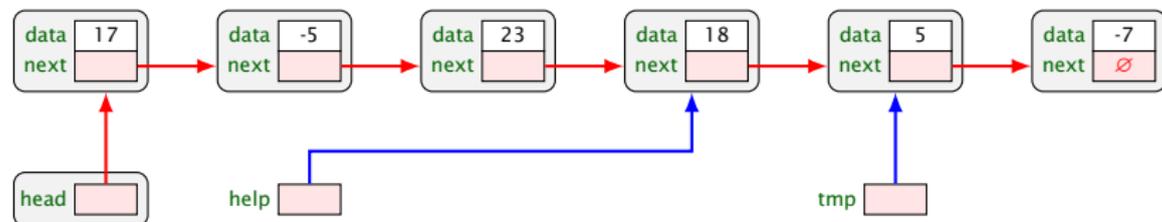
- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum  $i-1$ -ten Element
- ▶ Referenzen umsetzen + Speicher freigeben



# Verketteter Liste – Löschen nach Referenz

## Einfügen nach Element $i$ :

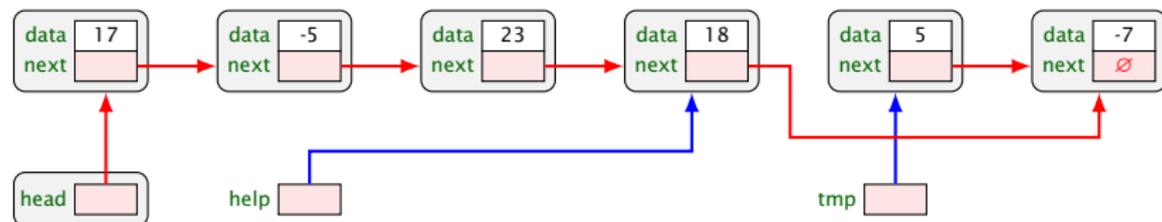
- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum  $i-1$ -ten Element
- ▶ Referenzen umsetzen + Speicher freigeben



# Verketteter Liste – Löschen nach Referenz

## Einfügen nach Element i:

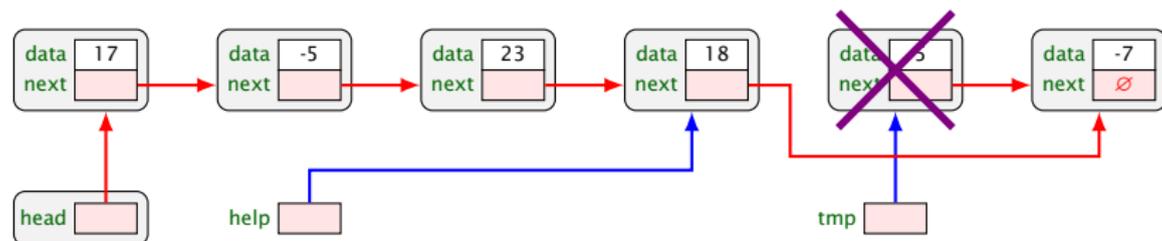
- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum **i-1**-ten Element
- ▶ Referenzen umsetzen + Speicher freigeben



# Verketteter Liste – Löschen nach Referenz

## Einfügen nach Element i:

- ▶ beginne bei **head**-Referenz
- ▶ “vorhangeln” entlang **next**-Referenzen bis zum **i-1**-ten Element
- ▶ Referenzen umsetzen + Speicher freigeben



## Implementierung: Feld via Liste

```
4 struct Node {
5     int data;
6     Node *next;
7
8     Node(int d, Node* n) {
9         data = d;
10        next = n;
11    }
12 };
```

## Implementierung: Feld via Liste

```
14 class Feld {
15     int n;
16     Node *head;
17 public:
18
19     Feld() { // erzeuge leeres Feld
20         n = 0;
21         head = NULL;
22     }
23
24     int size() { return n; }
25
26     int elementAt(int i) {
27         Node* h = head;
28         while (i-- > 1)
29             h = h->next;
30         return h->data;
31     }
```

## Implementierung: Feld via Liste

```
33     void insert(int d, int i) {
34         Node* tmp = new Node(d, NULL);
35         n++;
36         if (i == 1) {
37             tmp->next = head;
38             head      = tmp;
39             return;
40         }
41         Node* h = head;
42         i--;
43         while (i-- > 1)
44             h = h->next;
45         tmp->next = h->next;
46         h->next  = tmp;
47     }
```

## Implementierung: Feld via Liste

```
49     void erase(int i) {
50         n--;
51         if (i == 1) {
52             Node* tmp = head;
53             head = head->next;
54             delete tmp;
55             return;
56         }
57         Node* h = head;
58         i--;
59         while (i-- > 1)
60             h = h->next;
61         Node* tmp = h->next;
62         h->next = h->next->next;
63         delete tmp;
64     }
65 }; // end class
```

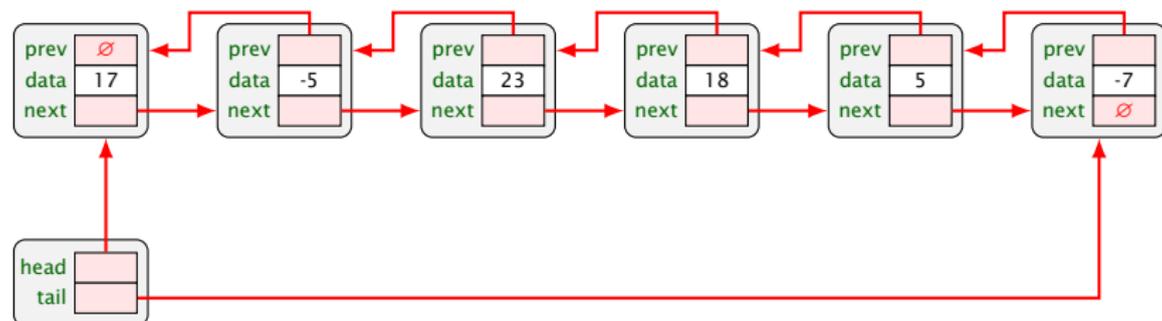
# Gegenüberstellung Array und verkettete Liste

Array	Verkettete Liste
⊕ Direkter Zugriff auf i-tes Element	⊖ Zugriff auf i-tes Element erfordert i Iterationen
⊕ sequentielles Durchlaufen sehr einfach	⊕ sequentielles Durchlaufen sehr einfach
⊖ statische Länge, kann Speicher verschwenden	⊕ dynamische Länge
	⊖ zusätzlicher Speicher für Zeiger benötigt
⊖ Einfügen/Löschen erfordert erheblich Kopieraufwand	⊕ Einfügen/Löschen einfach

# Feld als doppelt verkettete Liste

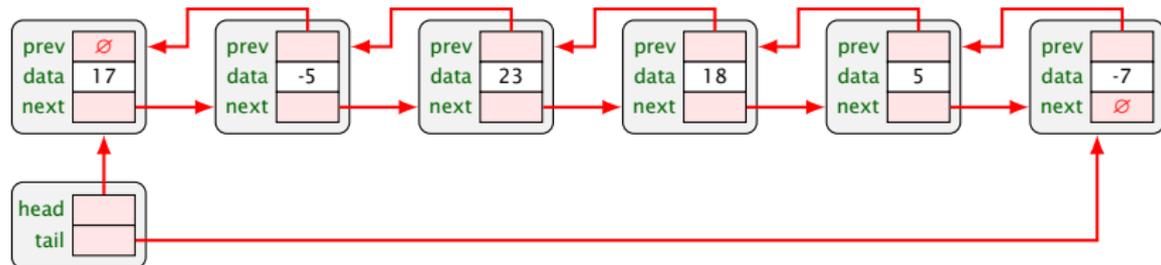
## Repräsentation von Feld A als doppelt verkettete Liste

- ▶ verkettete Liste
- ▶ jedes Element mit Referenzen **doppelt** verkettet



auf Englisch: *doubly linked list*

# Doppelt verkettete Liste



Folge von miteinander verbundenen Elementen

Jedes Element besteht aus

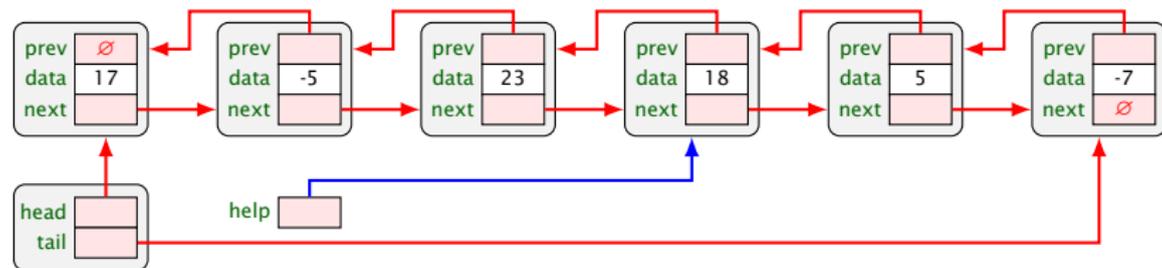
- ▶ **data**: Wert des Feldes
- ▶ **next**: Referenz auf das nächste Element
- ▶ **prev**: Referenz auf das vorherige Element

**head/tail** sind Referenzen auf erstes/letztes Element; diese haben keinen Nachfolger bzw. keinen Vorgänger.

# Operationen auf doppelt verketteter Liste

## Löschen von Element $i$ :

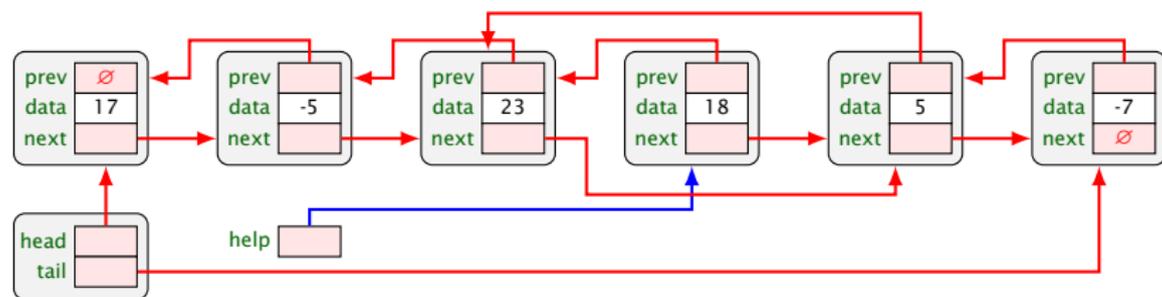
- ▶ Zugriff auf Element  $i$
- ▶ umhängen von Referenzen
- ▶ Speicherplatz freigeben



# Operationen auf doppelt verketteter Liste

## Löschen von Element $i$ :

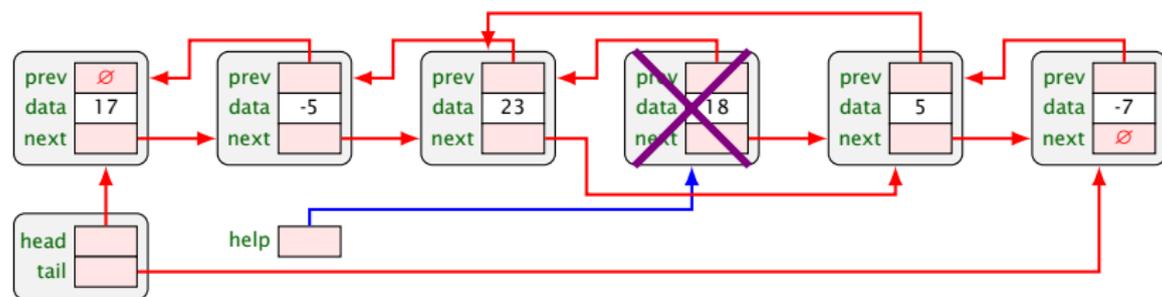
- ▶ Zugriff auf Element  $i$
- ▶ umhängen von Referenzen
- ▶ Speicherplatz freigeben



# Operationen auf doppelt verketteter Liste

## Löschen von Element $i$ :

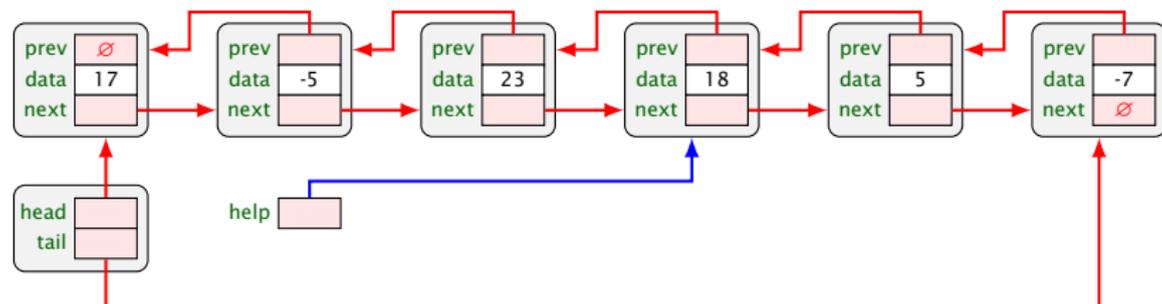
- ▶ Zugriff auf Element  $i$
- ▶ umhängen von Referenzen
- ▶ Speicherplatz freigeben



# Operationen auf doppelt verketteter Liste

## Einfügen von Element an Stelle $i$ :

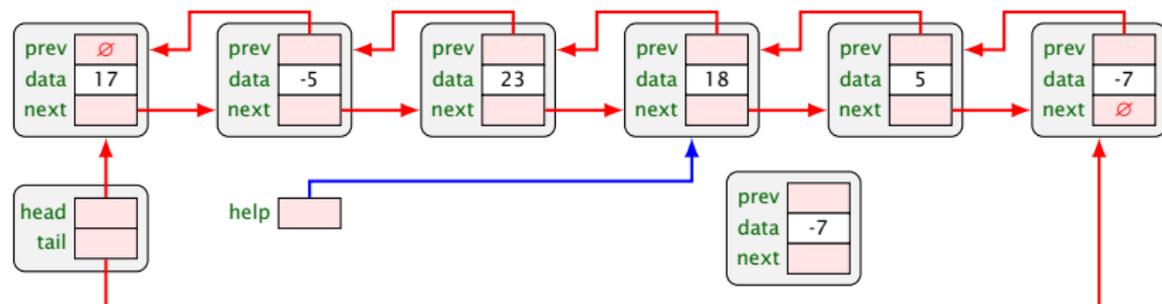
- ▶ Zugriff auf Element  $i-1$
- ▶ umhängen von Referenzen



# Operationen auf doppelt verketteter Liste

## Einfügen von Element an Stelle $i$ :

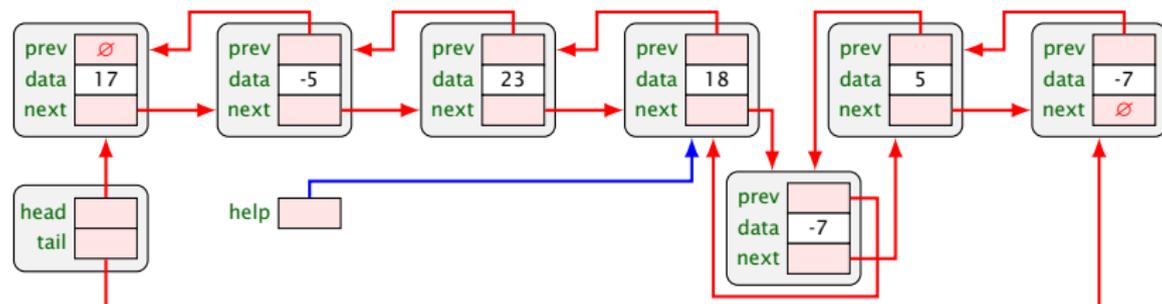
- ▶ Zugriff auf Element  $i-1$
- ▶ umhängen von Referenzen



# Operationen auf doppelt verketteter Liste

## Einfügen von Element an Stelle $i$ :

- ▶ Zugriff auf Element  $i-1$
- ▶ umhängen von Referenzen



# Eigenschaften doppelt verkettete Liste

## Doppelt verkettete Liste

### Vorteile:

- ▶ Durchlauf in beiden Richtungen möglich
- ▶ Einfügen/Löschen potentiell einfacher, da man sich Vorgänger nicht extra merken muss

### Nachteile:

- ▶ zusätzlicher Speicher erforderlich für zwei Referenzen
- ▶ Referenzverwaltung komplizierter und fehleranfällig

# Zusammenfassung Felder

Ein **Feld** A kann repräsentiert werden als:

- ▶ **Array**
- ▶ **verkettete Liste** (linked list)
- ▶ **doppelt verkettete Liste** (doubly linked list)

Eigenschaften:

- ▶ einfach und flexibel
- ▶ aber manche Operationen aufwendig

# Zusammenfassung Felder

Ein **Feld** A kann repräsentiert werden als:

- ▶ **Array**
- ▶ **verkettete Liste** (linked list)
- ▶ **doppelt verkettete Liste** (doubly linked list)

**Eigenschaften:**

- ▶ einfach und flexibel
- ▶ aber manche Operationen aufwendig

# Definition Abstrakter Datentyp

**Abstrakter Datentyp (englisch: abstract data type, ADT)** Ein **abstrakter Datentyp** ist ein mathematisches **Modell** für bestimmte Datenstrukturen mit vergleichbarem Verhalten.

Ein abstrakter Datentyp wird **indirekt** definiert über

- ▶ mögliche **Operationen** auf ihm sowie
- ▶ mathematische Bedingungen (oder: constraints) über die **Auswirkungen der Operationen** (u.U. auch die Kosten der Operationen).

# Beispiel abstrakter Datentyp: abstrakte Variable

Abstrakte Variable  $V$  ist eine veränderliche Dateneinheit mit zwei Operationen

- ▶  $\text{load}(V)$  liefert einen Wert
- ▶  $\text{store}(V, x)$  wobei  $x$  ein Wert ist

und der Bedingung

- ▶  $\text{load}(V)$  liefert immer den Wert  $x$  der letzten Operation  $\text{store}(V, x)$

# Beispiel abstrakter Datentyp: abstrakte Liste (Teil 1)

Abstrakte Liste  $L$  ist ein Datentyp

mit Operationen

- ▶  $\text{pushFront}(L, x)$  liefert eine Liste
- ▶  $\text{front}(L)$  liefert ein Element
- ▶  $\text{rest}(L)$  liefert eine Liste

und den Bedingungen

- ▶ ist  $x$  Element,  $L$  Liste, dann liefert  $\text{front}(\text{pushFront}(L, x))$  das Element  $x$ .
- ▶ ist  $x$  Element,  $L$  Liste, dann liefert  $\text{rest}(\text{pushFront}(L, x))$  die Liste  $L$ .

## Beispiel abstrakter Datentyp: abstrakte Liste (Teil 2)

Abstrakte Liste  $L$ . Weitere Operationen sind

- ▶ `isEmpty(L)` liefert `true` oder `false`
- ▶ `initialize()` liefert eine Listeninstanz

mit den Bedingungen

- ▶ `initialize() ≠ L` für jede Liste  $L$  (d.h. jede neue Liste ist separat von alten Listen)
- ▶ `isEmpty(initialize()) == true` (d.h. eine neue Liste ist leer)
- ▶ `isEmpty(pushFront(L, x)) == false` (d.h. eine Liste ist nach einem `pushFront` nicht leer)

## Definition Stack

**Stack (oder deutsch: Stapel, Keller)** Ein **Stack** ist ein abstrakter Datentyp. Er beschreibt eine spezielle Listenstruktur nach dem **Last In – First Out (LIFO)** Prinzip mit den Eigenschaften

- ▶ löschen, einfügen ist nur **am Ende** der Liste erlaubt,
- ▶ nur das **letzte Element** darf manipuliert werden.

# Definition Stack

**Stack (oder deutsch: Stapel, Keller)** Ein **Stack** ist ein abstrakter Datentyp. Er beschreibt eine spezielle Listenstruktur nach dem **Last In – First Out (LIFO)** Prinzip mit den Eigenschaften

- ▶ löschen, einfügen ist nur **am Ende** der Liste erlaubt,
- ▶ nur das **letzte Element** darf manipuliert werden.

## Operationen auf Stacks:

- ▶ **push**: legt ein Element auf den Stack (einfügen)
- ▶ **pop**: entfernt das letzte Element vom Stack (löschen)
- ▶ **top**: liefert das letzte Stack-Element
- ▶ **isEmpty**: liefert **true** falls Stack leer
- ▶ **initialize**: Stack erzeugen und in Anfangszustand (leer) setzen

# Definition Stack

**Stack (oder deutsch: Stapel, Keller)** Ein **Stack** ist ein abstrakter Datentyp. Er beschreibt eine spezielle Listenstruktur nach dem **Last In – First Out (LIFO)** Prinzip mit den Eigenschaften

- ▶ löschen, einfügen ist nur **am Ende** der Liste erlaubt,
- ▶ nur das **letzte Element** darf manipuliert werden.

## Definition Stack (exakter)

Stack  $S$  ist ein abstrakter Datentyp mit Operationen

- ▶  $\text{pop}(S)$  liefert einen Wert
- ▶  $\text{push}(S, x)$  wobei  $x$  ein Wert

mit der Bedingung

- ▶ ist  $x$  Wert und  $V$  Variable, dann ist die Sequenz  $\text{push}(S, x); V = \text{pop}(S);$  äquivalent zu  $V = x;$

## Definition Stack (exakter)

Stack  $S$  ist ein abstrakter Datentyp mit Operationen

- ▶  $\text{pop}(S)$  liefert einen Wert
- ▶  $\text{push}(S, x)$  wobei  $x$  ein Wert

mit der Bedingung

- ▶ ist  $x$  Wert und  $V$  Variable, dann ist die Sequenz  $\text{push}(S, x); V = \text{pop}(S);$  äquivalent zu  $V = x;$

sowie der Operation

- ▶  $\text{top}(S)$  liefert einen Wert

mit der Bedingung

- ▶ ist  $x$  Wert und  $V$  Variable, dann ist die Sequenz  $\text{push}(S, x); V = \text{top}(S);$  äquivalent zu  $\text{push}(S, x); V = x;$

## Definition Stack (exakter, Teil 2)

Stack  $S$ . Weitere Operationen sind

- ▶ `isEmpty(S)` liefert `true` oder `false`
- ▶ `initialize()` liefert eine Stackinstanz

mit den Bedingungen

- ▶ `initialize() ≠ S` für jeden Stack  $S$  (d.h. jeder neue Stack ist separat von alten Stacks)
- ▶ `isEmpty(initialize()) == true` (d.h. ein neuer Stack ist leer)
- ▶ `isEmpty(push(S, x)) == false` (d.h. ein Stack nach push ist nicht leer)

# Anwendungsbeispiele Stack

Call-Stack bei Funktionsaufrufen

Einfache Vorwärts- / Rückwärts Funktion in Software

- ▶ z.B. im Internet-Browser

Syntaxanalyse eines Programms

- ▶ z.B. zur Erkennung von Syntax-Fehlern durch Compiler

Auswertung arithmetischer Ausdrücke

# Auswertung arithmetischer Ausdrücke

Gegeben sei ein vollständig geklammerter, einfacher arithmetischer Ausdruck mit Bestandteilen Zahl, +, \*, =

**Beispiel:**  $(3 * (4 + 5)) =$

# Auswertung arithmetischer Ausdrücke

Gegeben sei ein vollständig geklammerter, einfacher arithmetischer Ausdruck mit Bestandteilen Zahl, +, \*, =

**Beispiel:**  $(3 * (4 + 5)) =$

## Schema:

- ▶ arbeite Ausdruck von links nach rechts ab, speichere jedes Zeichen ausser ) und = in Stack S
- ▶ bei ) werte die 3 obersten Elemente von S aus, dann entferne die passende Klammer ( vom Stack S und speichere Ergebnis in Stack S
- ▶ bei = steht das Ergebnis im obersten Stack-Element von S

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke

$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

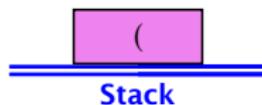
# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke

Stack

(	(	(	3	+	1	)	·	7	)	+	(	14	-	3	)	)
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	---	---

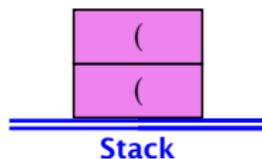
$((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3)$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



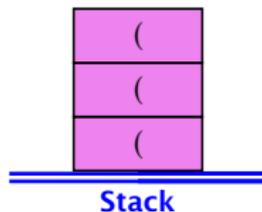
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



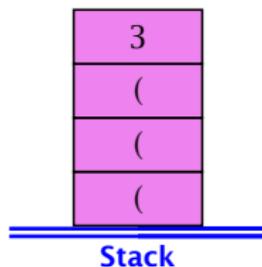
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



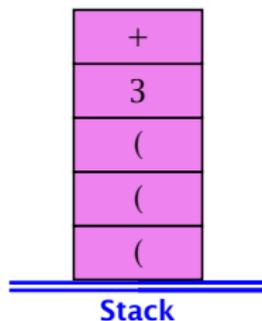
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



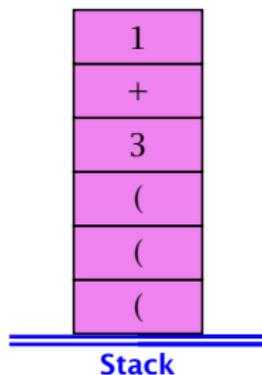
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



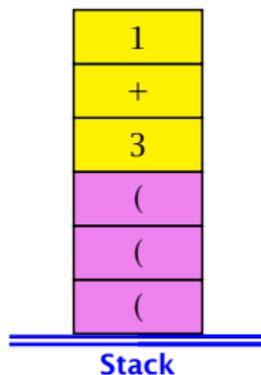
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



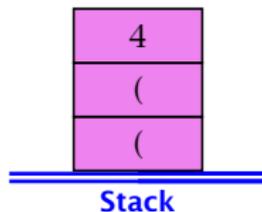
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



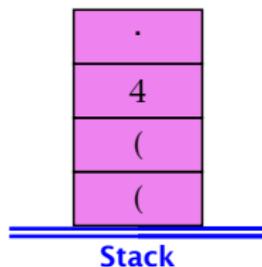
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



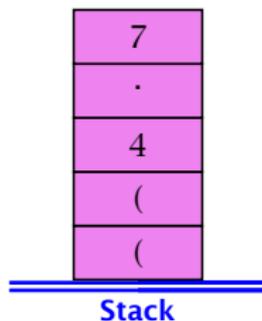
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



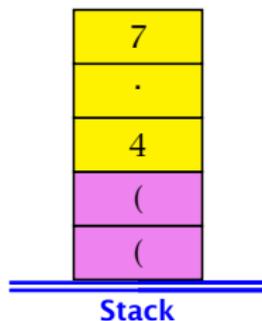
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



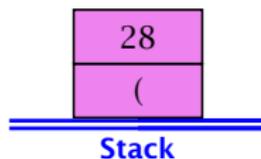
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



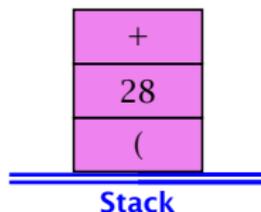
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



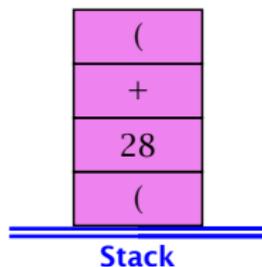
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



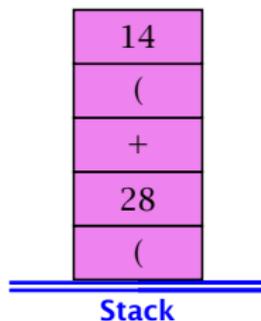
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



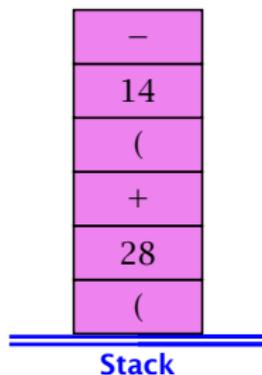
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



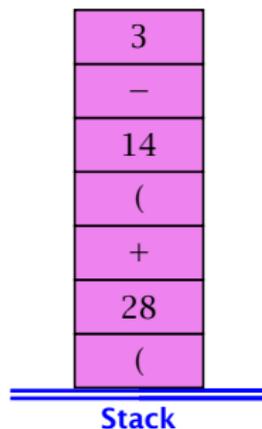
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



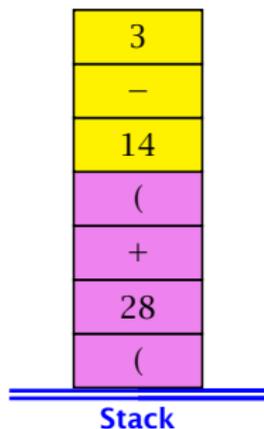
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



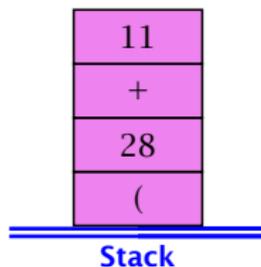
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



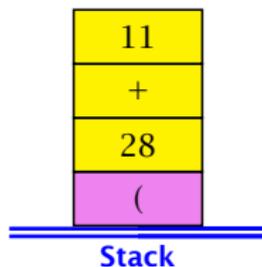
$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke



$$(((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3))$$

# Beispiel: Auswertung arithmetischer Ausdrücke

39

Stack

( ( ( 3 + 1 ) · 7 ) + ( 14 - 3 ) )

$((3 + 1) \cdot 7) + (14 - 3)$

# Implementation Stack

## Stack ist abstrakter Datentyp.

- ▶ Implementation ist nicht festgelegt
- ▶ nur Operationen und Bedingungen sind festgelegt

# Implementation Stack

## Stack ist abstrakter Datentyp.

- ▶ Implementation ist nicht festgelegt
- ▶ nur Operationen und Bedingungen sind festgelegt

Stack kann auf viele Arten implementiert werden, zum Beispiel als:

- ▶ Array
- ▶ verkettete Liste

# Implementation Stack via Array

Stack-Elemente im Array (Länge  $n$ ) speichern

oberstes Stack-Element merken mittels Variable  $top$

falls Stack **leer** ist  $top == -1$

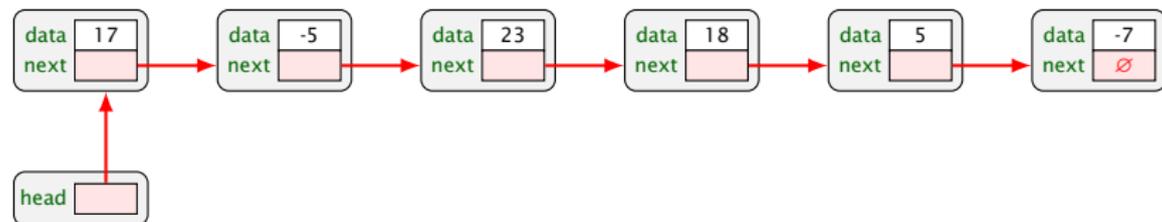


- ▶  $push(x)$  inkrementiert  $top$  und speichert  $x$  in  $A[top]$
- ▶  $pop()$  liefert  $A[top]$  zurück und dekrementiert  $top$
- ▶  $top()$  liefert  $A[top]$  zurück

# Implementation Stack als verkettete Liste

Stack-Elemente speichern in verketteter Liste

oberstes Stack-Element wird durch **head**-Referenz markiert



- ▶ **push(x)** fügt Element an erster Position ein
- ▶ **pop()** liefert Element an erster Position zurück und entfernt es
- ▶ **top()** liefert Element an erster Position zurück

# Zusammenfassung Stack

Stack ist **abstrakter Datentyp** als Metapher für einen Stapel

- ▶ wesentliche Operationen: **push, pop**

Implementation als **Array**

- ▶ fixe Größe (entweder Speicher verschwendet oder zu klein)
- ▶ push, pop sehr effizient

Implementation als **verkettete Liste**

- ▶ dynamische Größe, aber Platz für Zeiger “verschwendet”
- ▶ push, pop effizient
- ▶ eventuell nicht cache-effizient

# Definition Queue

## Queue (oder deutsch: Warteschlange)

Eine **Queue** ist ein abstrakter Datentyp. Sie beschreibt eine spezielle Listenstruktur nach dem **First In – First Out (FIFO)** Prinzip mit den Eigenschaften

- ▶ einfügen ist nur **am Ende** der Liste erlaubt,
- ▶ entfernen ist nur **am Anfang** der Liste erlaubt.



Person verlässt Schlange

Person stellt sich an

# Definition Queue

## Queue (oder deutsch: Warteschlange)

Eine **Queue** ist ein abstrakter Datentyp. Sie beschreibt eine spezielle Listenstruktur nach dem **First In – First Out (FIFO)** Prinzip mit den Eigenschaften

- ▶ einfügen ist nur **am Ende** der Liste erlaubt,
- ▶ entfernen ist nur **am Anfang** der Liste erlaubt.

## Operationen auf Queues:

- ▶ **enqueue**: fügt ein Element am Ende der Schlange hinzu
- ▶ **dequeue**: entfernt das erste Element der Schlange
- ▶ **isEmpty**: liefert **true** falls Queue leer
- ▶ **initialize**: Queue erzeugen und in Anfangszustand (leer) setzen

## Definition Queue (exakter)

Queue  $Q$  ist ein abstrakter Datentyp mit Operationen

- ▶ `dequeue(Q)` liefert einen Wert
- ▶ `enqueue(Q, x)` wobei  $x$  ein Wert
- ▶ `isEmpty(Q)` liefert `true` oder `false`
- ▶ `initialize` liefert eine Queue Instanz

und mit Bedingungen

- ▶ ist  $x$  Wert,  $V$  Variable,  $Q$  leere Queue, dann ist Sequenz `enqueue(Q, x); V=dequeue(Q);` äquivalent zu `V=x.`
- ▶ sind  $x, y$  Werte,  $V$  Variable und  $Q$  Queue, dann ist Sequenz `enqueue(Q, x); enqueue(Q, y); V=dequeue(Q)` äquivalent zu `enqueue(Q, x); V=dequeue(Q); enqueue(Q, y)`
- ▶ `initialize() ≠ Q` für jede Queue  $Q$
- ▶ `isEmpty(initialize()) == true`
- ▶ `isEmpty(enqueue(Q, x)) == false`

## Definition Queue (exakter)

Queue  $Q$  ist ein abstrakter Datentyp mit Operationen

- ▶ `dequeue(Q)` liefert einen Wert
- ▶ `enqueue(Q, x)` wobei  $x$  ein Wert
- ▶ `isEmpty(Q)` liefert `true` oder `false`
- ▶ `initialize` liefert eine Queue Instanz

und mit Bedingungen

- ▶ ist  $x$  Wert,  $V$  Variable,  $Q$  leere Queue, dann ist Sequenz `enqueue(Q, x); V=dequeue(Q);` äquivalent zu `V=x.`
- ▶ sind  $x, y$  Werte,  $V$  Variable und  $Q$  Queue, dann ist Sequenz `enqueue(Q, x); enqueue(Q, y); V=dequeue(Q)` äquivalent zu `enqueue(Q, x); V=dequeue(Q); enqueue(Q, y)`
- ▶ `initialize() ≠ Q` für jede Queue  $Q$
- ▶ `isEmpty(initialize()) == true`
- ▶ `isEmpty(enqueue(Q, x)) == false`

## Definition Queue (exakter)

Queue  $Q$  ist ein abstrakter Datentyp mit Operationen

- ▶ `dequeue(Q)` liefert einen Wert
- ▶ `enqueue(Q, x)` wobei  $x$  ein Wert
- ▶ `isEmpty(Q)` liefert `true` oder `false`
- ▶ `initialize` liefert eine Queue Instanz

und mit Bedingungen

- ▶ ist  $x$  Wert,  $V$  Variable,  $Q$  leere Queue, dann ist Sequenz `enqueue(Q, x); V=dequeue(Q);` äquivalent zu `V=x.`
- ▶ sind  $x, y$  Werte,  $V$  Variable und  $Q$  Queue, dann ist Sequenz `enqueue(Q, x); enqueue(Q, y); V=dequeue(Q)` äquivalent zu `enqueue(Q, x); V=dequeue(Q); enqueue(Q, y)`
- ▶ `initialize() ≠ Q` für jede Queue  $Q$
- ▶ `isEmpty(initialize()) == true`
- ▶ `isEmpty(enqueue(Q, x)) == false`

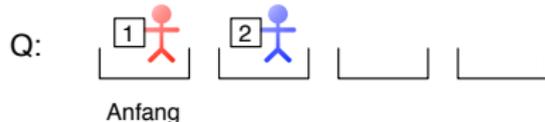
# Beispiel: Queue



`Q = initialize();`



`enqueue(1);`



`enqueue(2);`



`enqueue(3);`



`dequeue();`



`dequeue();`

# Anwendungsbeispiele Queue

- ▶ Druckerwarteschlange
- ▶ Playlist von iTunes (oder ähnlichem Musikprogramm)
- ▶ Kundenaufträge bei Webshops
- ▶ Warteschlange für Prozesse im Betriebssystem (Multitasking)

# Anwendungsbeispiel Stack und Queue

## Palindrom

Ein Palindrom ist eine Zeichenkette, die von vorn und von hinten gelesen gleich bleibt.

**Beispiel:** Reittier

Erkennung ob Zeichenkette ein Palindrom ist

- ▶ ein **Stack** kann die Reihenfolge der Zeichen umkehren
- ▶ eine **Queue** behält die Reihenfolge der Zeichen

# Palindromerkennung

```
1 Input: Zeichenkette str mit Laenge n
2 Output: true falls str Palindrom; sonst false
3
4 Stack S;
5 Queue Q;
6
7 i = 0;
8 while (i<n)
9     S.push(str[i]);
10    Q.enqueue(str[i]);
11    i++;
12 i = 0;
13 while (i<n)
14     s = S.pop();
15     q = Q.dequeue();
16     if (s != q) return false;
17     i++;
18 return true;
```

# Implementation Queue

Auch Queue ist abstrakter Datentyp.

- ▶ Implementation ist nicht festgelegt
- ▶ nur Operationen und Bedingungen sind festgelegt

Queue kann auf viele Arten implementiert werden, zum Beispiel als:

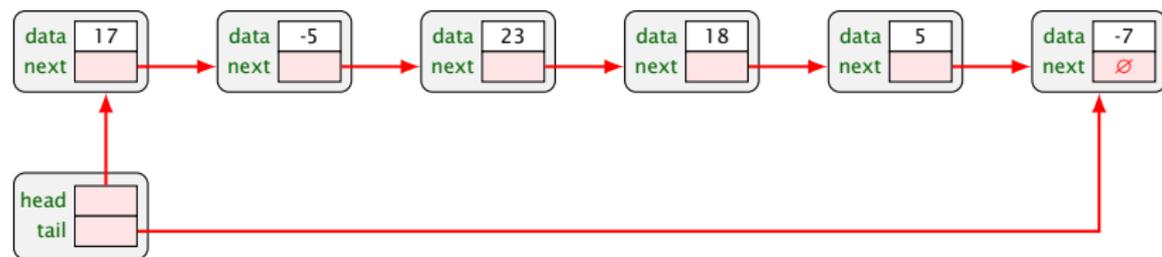
- ▶ verkettete Liste
- ▶ Array

# Implementation Queue als verkettete Liste

Queue-Elemente speichern in verketteter Liste

Anfang der Queue wird durch **head**-Referenz markiert

Ende der Queue wird durch extra **tail**-Referenz markiert



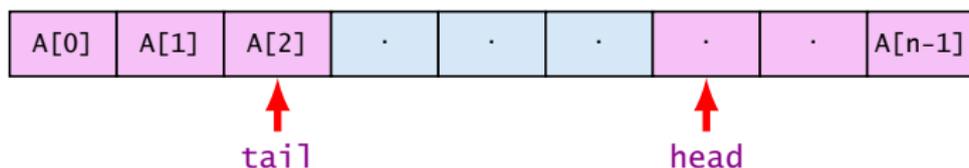
- ▶ **enqueue(x)** fügt Element bei **head**-Referenz ein
- ▶ **dequeue()** liefert Element bei **tail**-Referenz zurück und entfernt es

# Implementation Queue via Array

Queueelemente in Array (Länge  $n$ ) speichern

Anfang der Queue wird durch Index  $head$  markiert

Ende der Queue wird durch Index  $tail$  markiert



- ▶  $enqueue(x)$  fügt Element bei Index  $(tail+1)\%n$  ein
- ▶  $dequeue$  liefert Element bei Index  $head$  zurück und entfernt es durch Inkrement von  $head$  ( $head=(head+1)\%n$ )

## Implementation Queue als zwei Stacks

Queue `Q` kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack `inbox` wird für `enqueue` benutzt:

- ▶ `Q.enqueue(x)` resultiert in `inbox.push(x)`

zweiter Stack `outbox` wird für `dequeue` benutzt:

- ▶ falls `outbox` leer, kopiere alle Elemente von `inbox` zu `outbox`: `outbox.push( inbox.pop() )`
- ▶ `Q.dequeue()` liefert `outbox.pop()` zurück

inbox

`push(1)`

outbox

## Implementation Queue als zwei Stacks

Queue `Q` kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack `inbox` wird für `enqueue` benutzt:

- ▶ `Q.enqueue(x)` resultiert in `inbox.push(x)`

zweiter Stack `outbox` wird für `dequeue` benutzt:

- ▶ falls `outbox` leer, kopiere alle Elemente von `inbox` zu `outbox`: `outbox.push( inbox.pop() )`
- ▶ `Q.dequeue()` liefert `outbox.pop()` zurück



## Implementation Queue als zwei Stacks

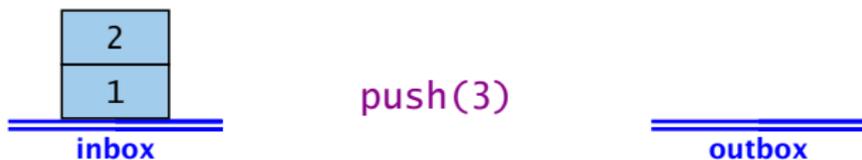
Queue  $Q$  kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack  $inbox$  wird für  $enqueue$  benutzt:

- ▶  $Q.enqueue(x)$  resultiert in  $inbox.push(x)$

zweiter Stack  $outbox$  wird für  $dequeue$  benutzt:

- ▶ falls  $outbox$  leer, kopiere alle Elemente von  $inbox$  zu  $outbox$ :  $outbox.push( inbox.pop() )$
- ▶  $Q.dequeue()$  liefert  $outbox.pop()$  zurück



## Implementation Queue als zwei Stacks

Queue `Q` kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack `inbox` wird für `enqueue` benutzt:

- ▶ `Q.enqueue(x)` resultiert in `inbox.push(x)`

zweiter Stack `outbox` wird für `dequeue` benutzt:

- ▶ falls `outbox` leer, kopiere alle Elemente von `inbox` zu `outbox`: `outbox.push( inbox.pop() )`
- ▶ `Q.dequeue()` liefert `outbox.pop()` zurück



## Implementation Queue als zwei Stacks

Queue  $Q$  kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack  $inbox$  wird für  $enqueue$  benutzt:

- ▶  $Q.enqueue(x)$  resultiert in  $inbox.push(x)$

zweiter Stack  $outbox$  wird für  $dequeue$  benutzt:

- ▶ falls  $outbox$  leer, kopiere alle Elemente von  $inbox$  zu  $outbox$ :  $outbox.push( inbox.pop() )$
- ▶  $Q.dequeue()$  liefert  $outbox.pop()$  zurück



## Implementation Queue als zwei Stacks

Queue `Q` kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack `inbox` wird für `enqueue` benutzt:

- ▶ `Q.enqueue(x)` resultiert in `inbox.push(x)`

zweiter Stack `outbox` wird für `dequeue` benutzt:

- ▶ falls `outbox` leer, kopiere alle Elemente von `inbox` zu `outbox`: `outbox.push( inbox.pop() )`
- ▶ `Q.dequeue()` liefert `outbox.pop()` zurück



# Implementation Queue als zwei Stacks

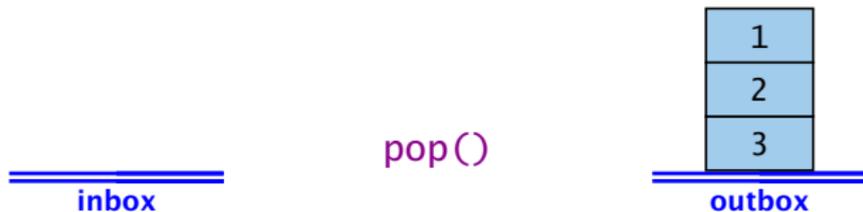
Queue `Q` kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack `inbox` wird für `enqueue` benutzt:

- ▶ `Q.enqueue(x)` resultiert in `inbox.push(x)`

zweiter Stack `outbox` wird für `dequeue` benutzt:

- ▶ falls `outbox` leer, kopiere alle Elemente von `inbox` zu `outbox`: `outbox.push( inbox.pop() )`
- ▶ `Q.dequeue()` liefert `outbox.pop()` zurück



# Implementation Queue als zwei Stacks

Queue `Q` kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack `inbox` wird für `enqueue` benutzt:

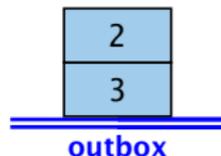
- ▶ `Q.enqueue(x)` resultiert in `inbox.push(x)`

zweiter Stack `outbox` wird für `dequeue` benutzt:

- ▶ falls `outbox` leer, kopiere alle Elemente von `inbox` zu `outbox`: `outbox.push( inbox.pop() )`
- ▶ `Q.dequeue()` liefert `outbox.pop()` zurück

inbox

`push(4)`



# Implementation Queue als zwei Stacks

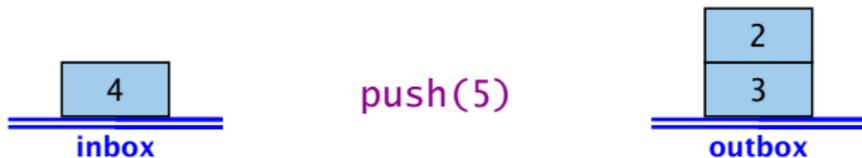
Queue `Q` kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack `inbox` wird für `enqueue` benutzt:

- ▶ `Q.enqueue(x)` resultiert in `inbox.push(x)`

zweiter Stack `outbox` wird für `dequeue` benutzt:

- ▶ falls `outbox` leer, kopiere alle Elemente von `inbox` zu `outbox`: `outbox.push( inbox.pop() )`
- ▶ `Q.dequeue()` liefert `outbox.pop()` zurück



# Implementation Queue als zwei Stacks

Queue  $Q$  kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack  $inbox$  wird für  $enqueue$  benutzt:

- ▶  $Q.enqueue(x)$  resultiert in  $inbox.push(x)$

zweiter Stack  $outbox$  wird für  $dequeue$  benutzt:

- ▶ falls  $outbox$  leer, kopiere alle Elemente von  $inbox$  zu  $outbox$ :  $outbox.push( inbox.pop() )$
- ▶  $Q.dequeue()$  liefert  $outbox.pop()$  zurück



## Implementation Queue als zwei Stacks

Queue `Q` kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack `inbox` wird für `enqueue` benutzt:

- ▶ `Q.enqueue(x)` resultiert in `inbox.push(x)`

zweiter Stack `outbox` wird für `dequeue` benutzt:

- ▶ falls `outbox` leer, kopiere alle Elemente von `inbox` zu `outbox`: `outbox.push( inbox.pop() )`
- ▶ `Q.dequeue()` liefert `outbox.pop()` zurück



## Implementation Queue als zwei Stacks

Queue  $Q$  kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack  $inbox$  wird für  $enqueue$  benutzt:

- ▶  $Q.enqueue(x)$  resultiert in  $inbox.push(x)$

zweiter Stack  $outbox$  wird für  $dequeue$  benutzt:

- ▶ falls  $outbox$  leer, kopiere alle Elemente von  $inbox$  zu  $outbox$ :  $outbox.push( inbox.pop() )$
- ▶  $Q.dequeue()$  liefert  $outbox.pop()$  zurück



## Implementation Queue als zwei Stacks

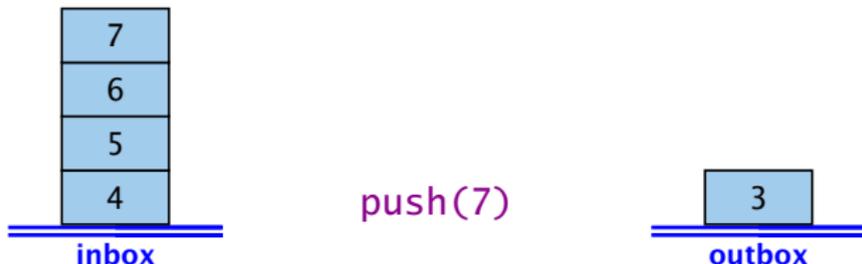
Queue `Q` kann mittels zwei Stacks implementiert werden

erster Stack `inbox` wird für `enqueue` benutzt:

- ▶ `Q.enqueue(x)` resultiert in `inbox.push(x)`

zweiter Stack `outbox` wird für `dequeue` benutzt:

- ▶ falls `outbox` leer, kopiere alle Elemente von `inbox` zu `outbox`: `outbox.push( inbox.pop() )`
- ▶ `Q.dequeue()` liefert `outbox.pop()` zurück



# Zusammenfassung Queue

Queue ist abstrakter Datentyp als Metapher für eine Warteschlange

- ▶ wesentliche Operationen: **enqueue, dequeue**

Implementation als verkettete Liste

- ▶ dynamische Größe, aber Platz für Referenzen “verschwendet”
- ▶ enqueue, dequeue effizient
- ▶ nicht cache-effizient

Implementation als Array

- ▶ fixe Größe (entweder Speicher verschwendet oder zu klein)
- ▶ enqueue, dequeue sehr effizient

# 5 Effizienz von Algorithmen

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

**Was messen wir?**

- ▶ Speicherverbrauch
- ▶ Laufzeit
- ▶ Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- ▶ Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- ▶ Festplattenzugriffe
- ▶ Programmgröße
- ▶ Energieverbrauch
- ▶ ...

# 5 Effizienz von Algorithmen

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

**Was messen wir?**

- ▶ Speicherverbrauch
- ▶ Laufzeit
- ▶ Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- ▶ Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- ▶ Festplattenzugriffe
- ▶ Programmgröße
- ▶ Energieverbrauch
- ▶ ...

# 5 Effizienz von Algorithmen

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

**Was messen wir?**

- ▶ Speicherverbrauch
- ▶ Laufzeit
- ▶ Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- ▶ Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- ▶ Festplattenzugriffe
- ▶ Programmgröße
- ▶ Energieverbrauch
- ▶ ...

# 5 Effizienz von Algorithmen

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

**Was messen wir?**

- ▶ Speicherverbrauch
- ▶ Laufzeit
- ▶ Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- ▶ Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- ▶ Festplattenzugriffe
- ▶ Programmgröße
- ▶ Energieverbrauch
- ▶ ...

# 5 Effizienz von Algorithmen

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

**Was messen wir?**

- ▶ Speicherverbrauch
- ▶ Laufzeit
- ▶ Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- ▶ Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- ▶ Festplattenzugriffe
- ▶ Programmgröße
- ▶ Energieverbrauch
- ▶ ...

## 5 Effizienz von Algorithmen

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

**Was messen wir?**

- ▶ Speicherverbrauch
- ▶ Laufzeit
- ▶ Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- ▶ Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- ▶ Festplattenzugriffe
- ▶ Programmgröße
- ▶ Energieverbrauch
- ▶ ...

# 5 Effizienz von Algorithmen

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

**Was messen wir?**

- ▶ Speicherverbrauch
- ▶ Laufzeit
- ▶ Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- ▶ Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- ▶ Festplattenzugriffe
- ▶ Programmgröße
- ▶ Energieverbrauch
- ▶ ...

## 5 Effizienz von Algorithmen

Was heißt ein Algorithmus ist effizient?

**Was messen wir?**

- ▶ Speicherverbrauch
- ▶ Laufzeit
- ▶ Anzahl Vergleiche (z.B. Sortieralgorithmen)
- ▶ Anzahl an Multiplikationen (wissenschaftliches Rechnen)
- ▶ Festplattenzugriffe
- ▶ Programmgröße
- ▶ Energieverbrauch
- ▶ ...

# 5 Effizienz von Algorithmen

## Wie messen wir?

- ▶ Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - ▶ Welche Eingaben?
  - ▶ Kann sehr aufwendig sein.
  - ▶ Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - ▶ Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- ▶ Theoretische Analyse in einem **Rechenmodell**.

Die Analyse eines Algorithmus z.B. eines Algorithmus zur Suche nach dem kürzesten Weg in einem Graphen kann immer in Zeit  $O(n^2)$  durchgeführt werden. In der Praxis wird das nicht gemacht, weil man auch andere Schranken ermitteln kann. Welche Schranken sind die besten? Welche Algorithmen führen zu den besten Schranken? Welche Algorithmen sind die besten?

# 5 Effizienz von Algorithmen

## Wie messen wir?

- ▶ Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - ▶ Welche Eingaben?
    - ▶ Kann sehr aufwendig sein.
    - ▶ Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
    - ▶ Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.

- ▶ Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.

Wie kann man die Effizienz eines Algorithmus messen?

Zeit und Speicherplatz

Die genaue Zeit wird durch die Hardware bestimmt.

Man kann auch andere Schranken ermitteln, jedoch

vergleichsweise komplizierteren Verfahren basierend auf

mathematischen Beweismethoden

# 5 Effizienz von Algorithmen

## Wie messen wir?

- ▶ Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - ▶ Welche Eingaben?
  - ▶ Kann sehr aufwendig sein.
  - ▶ Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - ▶ Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- ▶ Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.

Wie kann man die Effizienz eines Algorithmus messen?  
• Zeit  
• Speicherplatz  
• Energieverbrauch  
• ...  
• Die Effizienz eines Algorithmus wird durch die Komplexität des Algorithmus bestimmt.  
• Die Komplexität eines Algorithmus ist die Anzahl der Operationen, die er ausführt.  
• Die Komplexität eines Algorithmus ist eine Funktion der Größe der Eingabe.  
• Die Komplexität eines Algorithmus ist eine Funktion der Größe der Eingabe.  
• Die Komplexität eines Algorithmus ist eine Funktion der Größe der Eingabe.

# 5 Effizienz von Algorithmen

## Wie messen wir?

- ▶ Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - ▶ Welche Eingaben?
  - ▶ Kann sehr aufwendig sein.
  - ▶ Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
    - ▶ Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- ▶ Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.

Wie messen wir die Effizienz eines Algorithmus?  
• Laufzeit  
• Speicherbedarf  
• Energieverbrauch  
• ...

# 5 Effizienz von Algorithmen

## Wie messen wir?

- ▶ Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - ▶ Welche Eingaben?
  - ▶ Kann sehr aufwendig sein.
  - ▶ Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - ▶ Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- ▶ Theoretische Analyse in einem Rechenmodell.

# 5 Effizienz von Algorithmen

## Wie messen wir?

- ▶ Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - ▶ Welche Eingaben?
  - ▶ Kann sehr aufwendig sein.
  - ▶ Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - ▶ Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- ▶ Theoretische Analyse in einem **Rechenmodell**.
  - ▶ Gibt **asymptotische Garantien** wie z.B. „dieser Algorithmus läuft immer in Zeit  $\mathcal{O}(n^2)$ “.
  - ▶ Üblicherweise wird der **worst case** betrachtet.
  - ▶ Man kann auch untere Schranken erhalten: „jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt im worst case mindestens  $\Omega(n \log n)$  Vergleiche“.

# 5 Effizienz von Algorithmen

## Wie messen wir?

- ▶ Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - ▶ Welche Eingaben?
  - ▶ Kann sehr aufwendig sein.
  - ▶ Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - ▶ Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- ▶ Theoretische Analyse in einem **Rechenmodell**.
  - ▶ Gibt **asymptotische Garantien** wie z.B. „dieser Algorithmus läuft immer in Zeit  $\mathcal{O}(n^2)$ “.
  - ▶ Üblicherweise wird der **worst case** betrachtet.
  - ▶ Man kann auch untere Schranken erhalten: „jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt im worst case mindestens  $\Omega(n \log n)$  Vergleiche“.

# 5 Effizienz von Algorithmen

## Wie messen wir?

- ▶ Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - ▶ Welche Eingaben?
  - ▶ Kann sehr aufwendig sein.
  - ▶ Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - ▶ Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- ▶ Theoretische Analyse in einem **Rechenmodell**.
  - ▶ Gibt **asymptotische Garantien** wie z.B. „dieser Algorithmus läuft immer in Zeit  $\mathcal{O}(n^2)$ “.
  - ▶ Üblicherweise wird der **worst case** betrachtet.
    - ▶ Man kann auch untere Schranken erhalten: „jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt im worst case mindestens  $\Omega(n \log n)$  Vergleiche“.

# 5 Effizienz von Algorithmen

## Wie messen wir?

- ▶ Implementieren und Testen auf repräsentativen Eingaben.
  - ▶ Welche Eingaben?
  - ▶ Kann sehr aufwendig sein.
  - ▶ Präzise Resultate wenn sorgfältig durchgeführt.
  - ▶ Resultate gelten aber nur für spezifische Hardware, und spezifische Eingaben.
- ▶ Theoretische Analyse in einem **Rechenmodell**.
  - ▶ Gibt **asymptotische Garantien** wie z.B. „dieser Algorithmus läuft immer in Zeit  $\mathcal{O}(n^2)$ “.
  - ▶ Üblicherweise wird der **worst case** betrachtet.
  - ▶ Man kann auch untere Schranken erhalten: „jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt im worst case mindestens  $\Omega(n \log n)$  Vergleiche“.

## 5 Effizienz von Algorithmen

### Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  von der **Eingabelänge** auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die **Eingabelänge** ist z.B.

die Größe der Eingabe (z.B.  $n$ )

die Anzahl der Operationen

die Anzahl der Speicherzellen

die Anzahl der Energiepakete

die Anzahl der Speicherzellen, die gleichzeitig aktiv sind

## 5 Effizienz von Algorithmen

### Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  von der **Eingabelänge** auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die **Eingabelänge** ist z.B.

## 5 Effizienz von Algorithmen

### Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  von der **Eingabelänge** auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die **Eingabelänge** ist z.B.

- ▶ die Größe der Eingabe (Anzahl an bits)
- ▶ die Anzahl der Argumente

### Example 1

Angenommen  $n$  Zahlen aus dem Bereich  $\{1, \dots, N\}$  sollen sortiert werden. Wir sagen üblicherweise, dass die Eingabelänge  $n$  ist, anstatt z.B.  $n \log N$ , was der Anzahl an Bits entsprechen würde.

## 5 Effizienz von Algorithmen

### Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  von der **Eingabelänge** auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die **Eingabelänge** ist z.B.

- ▶ die Größe der Eingabe (Anzahl an bits)
- ▶ die Anzahl der Argumente

### Example 1

Angenommen  $n$  Zahlen aus dem Bereich  $\{1, \dots, N\}$  sollen sortiert werden. Wir sagen üblicherweise, dass die Eingabelänge  $n$  ist, anstatt z.B.  $n \log N$ , was der Anzahl an Bits entsprechen würde.

## 5 Effizienz von Algorithmen

### Eingabelänge

Die theoretischen Schranken werden als Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  von der **Eingabelänge** auf die Laufzeit (oder Speicherverbrauch, Energieverbrauch etc.) angegeben.

Die **Eingabelänge** ist z.B.

- ▶ die Größe der Eingabe (Anzahl an bits)
- ▶ die Anzahl der Argumente

### Example 1

Angenommen  $n$  Zahlen aus dem Bereich  $\{1, \dots, N\}$  sollen sortiert werden. Wir sagen üblicherweise, dass die Eingabelänge  $n$  ist, anstatt z.B.  $n \log N$ , was der Anzahl an Bits entsprechen würde.

## Wie messen wir

Wie lange die Laufzeit in einem bestimmten Rechenmodell  
zu dauern (z.B. Machine Learning)  
Wie schnell ein Modell von Testpersonen wie z.B. Analysten  
akzeptiert wird (Mitarbeiter, Fachkollegen, etc.)

## Wie messen wir

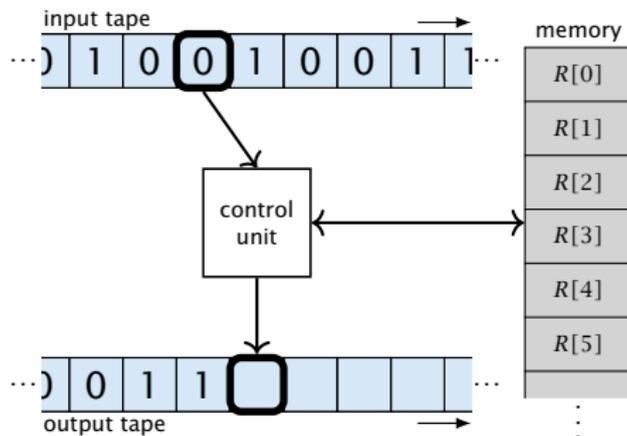
1. Berechne die Laufzeit in einem idealisierten Rechenmodell (z.B. Random Access Machine (RAM))
2. Berechne Anzahl von Basisoperationen wie z.B. Anzahl an Vergleichen, Multiplikationen, Festplattenzugriffen etc.

## Wie messen wir

1. Berechne die Laufzeit in einem idealisierten Rechenmodell (z.B. Random Access Machine (RAM))
2. Berechne Anzahl von Basisoperationen wie z.B. Anzahl an Vergleichen, Multiplikationen, Festplattenzugriffen etc.

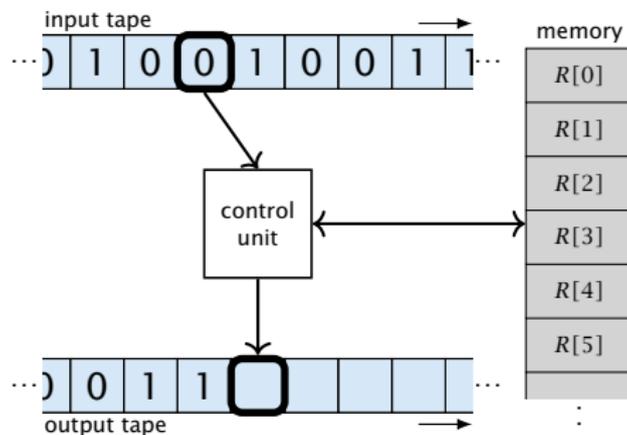
# Random Access Machine (RAM)

- ▶ Ein- und Ausgabeband (Folge von Einsen und Nullen; unbeschränkte Länge).
- ▶ Speicher: unendlich viele Register  $R[0], R[1], R[2], \dots$ .
- ▶ Register können beliebige Integer speichern.
- ▶ Indirekte Adressierung.



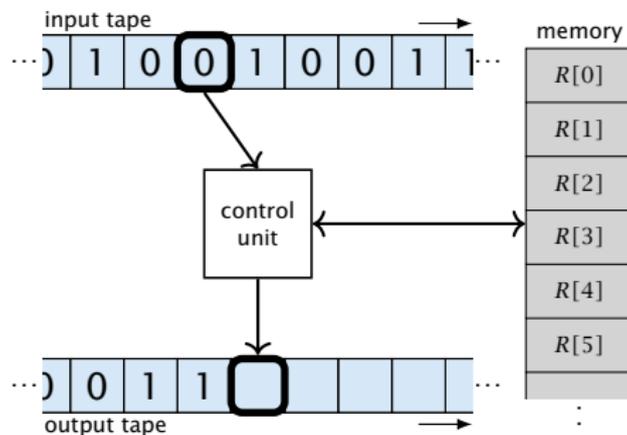
# Random Access Machine (RAM)

- ▶ Ein- und Ausgabeband (Folge von Einsen und Nullen; unbeschränkte Länge).
- ▶ Speicher: unendlich viele Register  $R[0], R[1], R[2], \dots$ 
  - ▶ Register können beliebige Integer speichern.
  - ▶ Indirekte Adressierung.



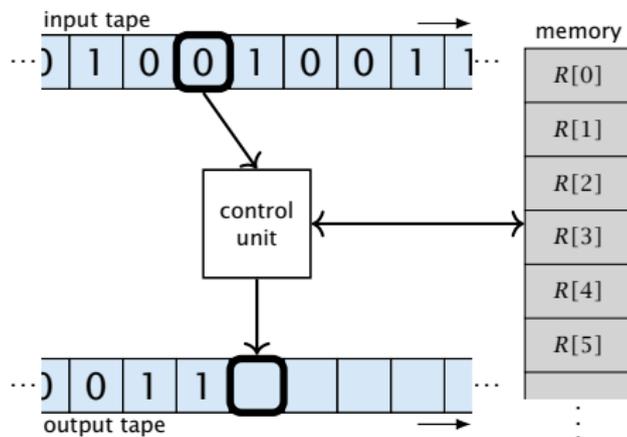
# Random Access Machine (RAM)

- ▶ Ein- und Ausgabeband (Folge von Einsen und Nullen; unbeschränkte Länge).
- ▶ Speicher: unendlich viele Register  $R[0], R[1], R[2], \dots$
- ▶ Register können beliebige Integer speichern.
- ▶ Indirekte Adressierung.



# Random Access Machine (RAM)

- ▶ Ein- und Ausgabeband (Folge von Einsen und Nullen; unbeschränkte Länge).
- ▶ Speicher: unendlich viele Register  $R[0], R[1], R[2], \dots$
- ▶ Register können beliebige Integer speichern.
- ▶ Indirekte Adressierung.



# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
- ▶ Registertransfers
- ▶ indirekte Adressierung

▶  $R[i]$  = Inhalt des  $i$ -ten Registers in das  $j$ -te Register

▶  $R[j] \leftarrow R[i]$  = Inhalt des  $i$ -ten Registers in das  $j$ -te Register

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
- ▶ Registertransfers
- ▶ indirekte Adressierung

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
  - ▶ WRITE  $i$
- ▶ Registertransfers
- ▶ indirekte Adressierung

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
  - ▶ WRITE  $i$
- ▶ Registertransfers
- ▶ indirekte Adressierung

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
  - ▶ WRITE  $i$
- ▶ Registertransfers
  - ▶  $R[j] := R[i]$
  - ▶  $R[j] := 4$
- ▶ indirekte Adressierung

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
  - ▶ WRITE  $i$
- ▶ Registertransfers
  - ▶  $R[j] := R[i]$
  - ▶  $R[j] := 4$
- ▶ indirekte Adressierung

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
  - ▶ WRITE  $i$
- ▶ Registertransfers
  - ▶  $R[j] := R[i]$
  - ▶  $R[j] := 4$
- ▶ indirekte Adressierung

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
  - ▶ WRITE  $i$
- ▶ Registertransfers
  - ▶  $R[j] := R[i]$
  - ▶  $R[j] := 4$
- ▶ **indirekte** Adressierung
  - ▶  $R[j] := R[R[i]]$   
lädt den Inhalt des  $R[i]$ -ten Registres in das  $j$ -te Register.
  - ▶  $R[R[i]] := R[j]$   
lädt den Inhalt des  $j$ -ten Registers in das  $R[i]$ -te Register

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
  - ▶ WRITE  $i$
- ▶ Registertransfers
  - ▶  $R[j] := R[i]$
  - ▶  $R[j] := 4$
- ▶ **indirekte** Adressierung
  - ▶  $R[j] := R[R[i]]$   
lädt den Inhalt des  $R[i]$ -ten Registres in das  $j$ -te Register.
  - ▶  $R[R[i]] := R[j]$   
lädt den Inhalt des  $j$ -ten Registers in das  $R[i]$ -te Register

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Eingabeoperationen (input tape  $\rightarrow R[i]$ )
  - ▶ READ  $i$
- ▶ Ausgabeoperationen ( $R[i] \rightarrow$  output tape)
  - ▶ WRITE  $i$
- ▶ Registertransfers
  - ▶  $R[j] := R[i]$
  - ▶  $R[j] := 4$
- ▶ **indirekte** Adressierung
  - ▶  $R[j] := R[R[i]]$   
lädt den Inhalt des  $R[i]$ -ten Registres in das  $j$ -te Register.
  - ▶  $R[R[i]] := R[j]$   
lädt den Inhalt des  $j$ -ten Registers in das  $R[i]$ -te Register

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - ▶ `jump x`
    - springe zur Position  $x$  im Programm
    - setze Befehlszähler auf  $x$
    - der nächste Befehl wird aus Register  $R[x]$  gelesen
  - ▶ `jumpz x R[i]`
    - springe zu  $x$  falls  $R[i] = 0$
    - falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - ▶ `jumpi i`
    - springe zu  $R[i]$  (indirekter Sprung);
- ▶ arithmetische Operationen:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - ▶ `jump  $x$` 
    - springe zur Position  $x$  im Programm
    - setze Befehlszähler auf  $x$
    - der nächste Befehl wird aus Register  $R[x]$  gelesen
  - ▶ `jumpz  $x$   $R[i]$` 
    - springe zu  $x$  falls  $R[i] = 0$
    - falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - ▶ `jumpi  $i$` 
    - springe zu  $R[i]$  (indirekter Sprung);
- ▶ arithmetische Operationen:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - ▶ `jump  $x$` 
    - springe zur Position  $x$  im Programm
    - setze Befehlszähler auf  $x$
    - der nächste Befehl wird aus Register  $R[x]$  gelesen
  - ▶ `jumpz  $x R[i]$` 
    - springe zu  $x$  falls  $R[i] = 0$
    - falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - ▶ `jumpi  $i$` 
    - springe zu  $R[i]$  (indirekter Sprung);
- ▶ arithmetische Operationen:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - ▶ `jump  $x$`   
springe zur Position  $x$  im Programm  
setze Befehlszähler auf  $x$   
der nächste Befehl wird aus Register  $R[x]$  gelesen
  - ▶ `jumpz  $x R[i]$`   
springe zu  $x$  falls  $R[i] = 0$   
falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - ▶ `jumpi  $i$`   
springe zu  $R[i]$  (indirekter Sprung);
- ▶ arithmetische Operationen:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - ▶ jump  $x$   
springe zur Position  $x$  im Programm  
setze Befehlszähler auf  $x$   
der nächste Befehl wird aus Register  $R[x]$  gelesen
  - ▶ jumpz  $x R[i]$   
springe zu  $x$  falls  $R[i] = 0$   
falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - ▶ jumpi  $i$   
springe zu  $R[i]$  (indirekter Sprung);
- ▶ arithmetische Operationen:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$ 
  - ▶  $R[i] := R[j] + R[k];$
  - ▶  $R[i] := -R[k];$

# Random Access Machine (RAM)

## Operationen

- ▶ Verzweigungen (inklusive Schleifen) abhängig von Vergleichen
  - ▶ jump  $x$   
springe zur Position  $x$  im Programm  
setze Befehlszähler auf  $x$   
der nächste Befehl wird aus Register  $R[x]$  gelesen
  - ▶ jumpz  $x R[i]$   
springe zu  $x$  falls  $R[i] = 0$   
falls nicht wird der Befehlszähler um 1 erhöht
  - ▶ jumpi  $i$   
springe zu  $R[i]$  (indirekter Sprung);
- ▶ arithmetische Operationen:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$ 
  - ▶  $R[i] := R[j] + R[k];$   
 $R[i] := -R[k];$

# Rechenmodell

Man nimmt normalerweise an, dass jeder Befehl eine Zeiteinheit kostet.

# Komplexitätsschranken

Es gibt **unterschiedliche Komplexitätsschranken**:

- ▶ **best-case** Komplexität:

$$C_{bc}(n) := \min\{C(x) \mid |x| = n\}$$

Normalerweise einfach zu analysieren; nicht sehr hilfreich

- ▶ **worst-case** Komplexität:

$$C_{wc}(n) := \max\{C(x) \mid |x| = n\}$$

Standard. Manchmal zu pessimistisch.

- ▶ **average case** Komplexität:

$$C_{avg}(n) := \frac{1}{|I_n|} \sum_{|x|=n} C(x)$$

Manchmal schwierig zu analysieren.

# Komplexitätsschranken

Es gibt **unterschiedliche Komplexitätsschranken**:

- ▶ **best-case** Komplexität:

$$C_{bc}(n) := \min\{C(x) \mid |x| = n\}$$

Normalerweise einfach zu analysieren; nicht sehr hilfreich

- ▶ **worst-case** Komplexität:

$$C_{wc}(n) := \max\{C(x) \mid |x| = n\}$$

Standard. Manchmal zu pessimistisch.

- ▶ **average case** Komplexität:

$$C_{avg}(n) := \frac{1}{|I_n|} \sum_{|x|=n} C(x)$$

Manchmal schwierig zu analysieren.

# Komplexitätsschranken

Es gibt **unterschiedliche Komplexitätsschranken**:

- ▶ **best-case** Komplexität:

$$C_{bc}(n) := \min\{C(x) \mid |x| = n\}$$

Normalerweise einfach zu analysieren; nicht sehr hilfreich

- ▶ **worst-case** Komplexität:

$$C_{wc}(n) := \max\{C(x) \mid |x| = n\}$$

Standard. Manchmal zu pessimistisch.

- ▶ **average case** Komplexität:

$$C_{avg}(n) := \frac{1}{|I_n|} \sum_{|x|=n} C(x)$$

Manchmal schwierig zu analysieren.

# Komplexitätsschranken

Es gibt **unterschiedliche Komplexitätsschranken**:

- ▶ **best-case** Komplexität:

$$C_{bc}(n) := \min\{C(x) \mid |x| = n\}$$

Normalerweise einfach zu analysieren; nicht sehr hilfreich

- ▶ **worst-case** Komplexität:

$$C_{wc}(n) := \max\{C(x) \mid |x| = n\}$$

Standard. Manchmal zu pessimistisch.

- ▶ **average case** Komplexität:

$$C_{avg}(n) := \frac{1}{|I_n|} \sum_{|x|=n} C(x)$$

Manchmal schwierig zu analysieren.

# Asymptotische Notation

Wir interessieren uns normalerweise nicht für exakte Laufzeiten, sondern für eine **asymptotische Klassifikation** der Laufzeit, die konstante Faktoren und additive Terme ignoriert.

# Asymptotische Notation

Wir interessieren uns normalerweise nicht für exakte Laufzeiten, sondern für eine **asymptotische Klassifikation** der Laufzeit, die konstante Faktoren und additive Terme ignoriert.

- ▶ Wir interessieren uns für Laufzeiten bei großen Werten von  $n$ . Konstante additive Terme sind dann unwichtig.
- ▶ Eine superexakte Analyse (e.g. das *exakte* Zählen der Operationen auf einer RAM) ist schwierig, und würde die Resultate nicht verbessern, da das Rechenmodell die Realität nicht so exakt abbildet.
- ▶ Ein linearer speed-up (z.B. um einen konstanten Faktor) läßt sich z.B. erreichen wenn man den Algorithmus auf einem schnelleren Rechner laufen läßt.
- ▶ Laufzeiten sollte man durch einfache Funktionen ausdrücken können.

# Asymptotische Notation

Wir interessieren uns normalerweise nicht für exakte Laufzeiten, sondern für eine **asymptotische Klassifikation** der Laufzeit, die konstante Faktoren und additive Terme ignoriert.

- ▶ Wir interessieren uns für Laufzeiten bei großen Werten von  $n$ . Konstante additive Terme sind dann unwichtig.
- ▶ Eine superexakte Analyse (e.g. das *exakte* Zählen der Operationen auf einer RAM) ist schwierig, und würde die Resultate nicht verbessern, da das Rechenmodell die Realität nicht so exakt abbildet.
- ▶ Ein linearer speed-up (z.B. um einen konstanten Faktor) läßt sich z.B. erreichen wenn man den Algorithmus auf einem schnelleren Rechner laufen läßt.
- ▶ Laufzeiten sollte man durch einfache Funktionen ausdrücken können.

# Asymptotische Notation

Wir interessieren uns normalerweise nicht für exakte Laufzeiten, sondern für eine **asymptotische Klassifikation** der Laufzeit, die konstante Faktoren und additive Terme ignoriert.

- ▶ Wir interessieren uns für Laufzeiten bei großen Werten von  $n$ . Konstante additive Terme sind dann unwichtig.
- ▶ Eine superexakte Analyse (e.g. das *exakte* Zählen der Operationen auf einer RAM) ist schwierig, und würde die Resultate nicht verbessern, da das Rechenmodell die Realität nicht so exakt abbildet.
- ▶ Ein linearer speed-up (z.B. um einen konstanten Faktor) läßt sich z.B. erreichen wenn man den Algorithmus auf einem schnelleren Rechner laufen läßt.
- ▶ Laufzeiten sollte man durch einfache Funktionen ausdrücken können.

# Asymptotische Notation

Wir interessieren uns normalerweise nicht für exakte Laufzeiten, sondern für eine **asymptotische Klassifikation** der Laufzeit, die konstante Faktoren und additive Terme ignoriert.

- ▶ Wir interessieren uns für Laufzeiten bei großen Werten von  $n$ . Konstante additive Terme sind dann unwichtig.
- ▶ Eine superexakte Analyse (e.g. das *exakte* Zählen der Operationen auf einer RAM) ist schwierig, und würde die Resultate nicht verbessern, da das Rechenmodell die Realität nicht so exakt abbildet.
- ▶ Ein linearer speed-up (z.B. um einen konstanten Faktor) läßt sich z.B. erreichen wenn man den Algorithmus auf einem schnelleren Rechner laufen läßt.
- ▶ Laufzeiten sollte man durch einfache Funktionen ausdrücken können.

# Asymptotische Notation

## Formale Definition

Sei  $f$  eine Funktion von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}^+$ .

- ▶  $\mathcal{O}(f) = \{g \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \leq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **nicht schneller** als  $f$  wachsen)

# Asymptotische Notation

## Formale Definition

Sei  $f$  eine Funktion von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}^+$ .

- ▶  $\mathcal{O}(f) = \{g \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \leq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **nicht schneller** als  $f$  wachsen)
- ▶  $\Omega(f) = \{g \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \geq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **nicht langsamer** als  $f$  wachsen)

# Asymptotische Notation

## Formale Definition

Sei  $f$  eine Funktion von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}^+$ .

- ▶  $\mathcal{O}(f) = \{g \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \leq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **nicht schneller** als  $f$  wachsen)
- ▶  $\Omega(f) = \{g \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \geq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **nicht langsamer** als  $f$  wachsen)
- ▶  $\Theta(f) = \Omega(f) \cap \mathcal{O}(f)$   
(Funktionen die asymptotisch **gleiches** Wachstum wie  $f$  haben)

# Asymptotische Notation

## Formale Definition

Sei  $f$  eine Funktion von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}^+$ .

- ▶  $\mathcal{O}(f) = \{g \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \leq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **nicht schneller** als  $f$  wachsen)
- ▶  $\Omega(f) = \{g \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \geq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **nicht langsamer** als  $f$  wachsen)
- ▶  $\Theta(f) = \Omega(f) \cap \mathcal{O}(f)$   
(Funktionen die asymptotisch **gleiches** Wachstum wie  $f$  haben)
- ▶  $o(f) = \{g \mid \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \leq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotische **langsamer** als  $f$  wachsen)

# Asymptotische Notation

## Formale Definition

Sei  $f$  eine Funktion von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}^+$ .

- ▶  $\mathcal{O}(f) = \{g \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \leq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **nicht schneller** als  $f$  wachsen)
- ▶  $\Omega(f) = \{g \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \geq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **nicht langsamer** als  $f$  wachsen)
- ▶  $\Theta(f) = \Omega(f) \cap \mathcal{O}(f)$   
(Funktionen die asymptotisch **gleiches** Wachstum wie  $f$  haben)
- ▶  $o(f) = \{g \mid \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \leq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotische **langsamer** als  $f$  wachsen)
- ▶  $\omega(f) = \{g \mid \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : [g(n) \geq c \cdot f(n)]\}$   
(Funktionen die asymptotisch **schneller** als  $f$  wachsen)

# Asymptotische Notation

Äquivalente Definition mit Grenzwerten (gilt nur falls der jeweilige Grenzwert existiert).  $f$  und  $g$  seien Funktionen von  $\mathbb{N}_0$  nach  $\mathbb{R}_0^+$ .

$$\blacktriangleright g \in \mathcal{O}(f): 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

# Asymptotische Notation

Äquivalente Definition mit Grenzwerten (**gilt nur falls der jeweilige Grenzwert existiert**).  $f$  und  $g$  seien Funktionen von  $\mathbb{N}_0$  nach  $\mathbb{R}_0^+$ .

$$\blacktriangleright g \in \mathcal{O}(f): 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

$$\blacktriangleright g \in \Omega(f): 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} \leq \infty$$

# Asymptotische Notation

Äquivalente Definition mit Grenzwerten (**gilt nur falls der jeweilige Grenzwert existiert**).  $f$  und  $g$  seien Funktionen von  $\mathbb{N}_0$  nach  $\mathbb{R}_0^+$ .

$$\blacktriangleright g \in \mathcal{O}(f): 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

$$\blacktriangleright g \in \Omega(f): 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} \leq \infty$$

$$\blacktriangleright g \in \Theta(f): 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

# Asymptotische Notation

Äquivalente Definition mit Grenzwerten (gilt nur falls der jeweilige Grenzwert existiert).  $f$  und  $g$  seien Funktionen von  $\mathbb{N}_0$  nach  $\mathbb{R}_0^+$ .

$$\blacktriangleright g \in \mathcal{O}(f): 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

$$\blacktriangleright g \in \Omega(f): 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} \leq \infty$$

$$\blacktriangleright g \in \Theta(f): 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

$$\blacktriangleright g \in o(f): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

# Asymptotische Notation

Äquivalente Definition mit Grenzwerten (gilt nur falls der jeweilige Grenzwert existiert).  $f$  und  $g$  seien Funktionen von  $\mathbb{N}_0$  nach  $\mathbb{R}_0^+$ .

$$\blacktriangleright g \in \mathcal{O}(f): 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

$$\blacktriangleright g \in \Omega(f): 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} \leq \infty$$

$$\blacktriangleright g \in \Theta(f): 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

$$\blacktriangleright g \in o(f): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

$$\blacktriangleright g \in \omega(f): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$$

## Missbrauch dieser Notation

1. Man schreibt  $f = \mathcal{O}(g)$ , anstatt  $f \in \mathcal{O}(g)$ . Dies ist **keine** Gleichheit (wie kann eine Funktion das gleiche wie eine Funktionsmenge sein?).
2. Man schreibt  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ , anstatt  $f \in \mathcal{O}(g)$ , with  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, n \mapsto f(n)$ , and  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, n \mapsto g(n)$ .
3. Man schreibt  $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$ , anstatt  $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$ .

## Missbrauch dieser Notation

1. Man schreibt  $f = \mathcal{O}(g)$ , anstatt  $f \in \mathcal{O}(g)$ . Dies ist **keine** Gleichheit (wie kann eine Funktion das gleiche wie eine Funktionsmenge sein?).
2. Man schreibt  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ , anstatt  $f \in \mathcal{O}(g)$ , with  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, n \mapsto f(n)$ , and  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, n \mapsto g(n)$ .
3. Man schreibt  $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$ , anstatt  $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$ .

## Missbrauch dieser Notation

1. Man schreibt  $f = \mathcal{O}(g)$ , anstatt  $f \in \mathcal{O}(g)$ . Dies ist **keine** Gleichheit (wie kann eine Funktion das gleiche wie eine Funktionsmenge sein?).
2. Man schreibt  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ , anstatt  $f \in \mathcal{O}(g)$ , with  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, n \mapsto f(n)$ , and  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, n \mapsto g(n)$ .
3. Man schreibt  $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$ , anstatt  $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$ .

# Asymptotische Notation

Man kann einen Ausdruck mit asymptotischer Notation als **Menge** ansehen:

$$n^2 \cdot \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(\log n)$$

repräsentiert

$$\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid f(n) = n^2 \cdot g(n) + h(n)$$

$$\text{mit } g(n) \in \mathcal{O}(n) \text{ und } h(n) \in \mathcal{O}(\log n)\}$$

## Lemma 2

Seien  $f, g$  Funktionen mit  $\exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : f(n) > 0$  (das gleiche für  $g$ ). Dann

- ▶  $c \cdot f(n) = \mathcal{O}(f(n))$  für eine beliebige Konstante  $c$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) \cdot \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$

*Alle obigen Relationen gelten auch für  $\Omega$  und  $\Theta$ .*

# Asymptotische Notation

## Lemma 2

Seien  $f, g$  Funktionen mit  $\exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : f(n) > 0$  (das gleiche für  $g$ ). Dann

- ▶  $c \cdot f(n) = \mathcal{O}(f(n))$  für eine beliebige Konstante  $c$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) \cdot \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$

*Alle obigen Relationen gelten auch für  $\Omega$  und  $\Theta$ .*

# Asymptotische Notation

## Lemma 2

Seien  $f, g$  Funktionen mit  $\exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : f(n) > 0$  (das gleiche für  $g$ ). Dann

- ▶  $c \cdot f(n) = \mathcal{O}(f(n))$  für eine beliebige Konstante  $c$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) \cdot \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$

*Alle obigen Relationen gelten auch für  $\Omega$  und  $\Theta$ .*

# Asymptotische Notation

## Lemma 2

Seien  $f, g$  Funktionen mit  $\exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : f(n) > 0$  (das gleiche für  $g$ ). Dann

- ▶  $c \cdot f(n) = \mathcal{O}(f(n))$  für eine beliebige Konstante  $c$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) \cdot \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$

*Alle obigen Relationen gelten auch für  $\Omega$  und  $\Theta$ .*

# Asymptotische Notation

## Lemma 2

Seien  $f, g$  Funktionen mit  $\exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : f(n) > 0$  (das gleiche für  $g$ ). Dann

- ▶  $c \cdot f(n) = \mathcal{O}(f(n))$  für eine beliebige Konstante  $c$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) \cdot \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$
- ▶  $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$

Alle obigen Relationen gelten auch für  $\Omega$  und  $\Theta$ .

# Rechenregel für $\mathcal{O}$ -Notation

Zu zeigen:

$$T_1(n) + T_2(n) = \mathcal{O}(\max(f(n), g(n)))$$

für  $T_1(n) \in \mathcal{O}(f(n))$  und  $T_2(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ .

- ▶ da  $T_1(n) = \mathcal{O}(f(n))$ , gibt es  $c_1 > 0$  und  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $T_1(n) \leq c_1 f(n)$  für  $n \geq n_1$
- ▶ da  $T_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$ , gibt es  $c_2 > 0$  und  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $T_2(n) \leq c_2 g(n)$  für  $n \geq n_2$
- ▶ Setze  $n_0 := \max(n_1, n_2)$ , dann ist für  $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} T_1(n) + T_2(n) &\leq c_1 f(n) + c_2 g(n) \\ &\leq (c_1 + c_2) \max(f(n), g(n)) \quad \checkmark \end{aligned}$$

# Rechenregel für $\mathcal{O}$ -Notation

Zu zeigen:

$$T_1(n) + T_2(n) = \mathcal{O}(\max(f(n), g(n)))$$

für  $T_1(n) \in \mathcal{O}(f(n))$  und  $T_2(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ .

- ▶ da  $T_1(n) = \mathcal{O}(f(n))$ , gibt es  $c_1 > 0$  und  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $T_1(n) \leq c_1 f(n)$  für  $n \geq n_1$
- ▶ da  $T_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$ , gibt es  $c_2 > 0$  und  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $T_2(n) \leq c_2 g(n)$  für  $n \geq n_2$
- ▶ Setze  $n_0 := \max(n_1, n_2)$ , dann ist für  $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} T_1(n) + T_2(n) &\leq c_1 f(n) + c_2 g(n) \\ &\leq (c_1 + c_2) \max(f(n), g(n)) \quad \checkmark \end{aligned}$$

# Laufzeiten

Funktion $f(n)$	Eingabelänge $n$							
	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$
$\log n$	33ns	66ns	0.1 $\mu$ s	0.1 $\mu$ s	0.2 $\mu$ s	0.2 $\mu$ s	0.2 $\mu$ s	0.3 $\mu$ s
$\sqrt{n}$	32ns	0.1 $\mu$ s	0.3 $\mu$ s	1 $\mu$ s	3.1 $\mu$ s	10 $\mu$ s	31 $\mu$ s	0.1ms
$n$	100ns	1 $\mu$ s	10 $\mu$ s	0.1ms	1ms	10ms	0.1s	1s
$n \log n$	0.3 $\mu$ s	6.6 $\mu$ s	0.1ms	1.3ms	16ms	0.2s	2.3s	27s
$n^{3/2}$	0.3 $\mu$ s	10 $\mu$ s	0.3ms	10ms	0.3s	10s	5.2min	2.7h
$n^2$	1 $\mu$ s	0.1ms	10ms	1s	1.7min	2.8h	11d	3.2y
$n^3$	10 $\mu$ s	10ms	10s	2.8h	115d	317y	$3.2 \cdot 10^5$ y	
$1.1^n$	26ns	0.1ms	$7.8 \cdot 10^{25}$ y					
$2^n$	10 $\mu$ s	$4 \cdot 10^{14}$ y						
$n!$	36ms	$3 \cdot 10^{142}$ y						

1 Operation = 10ns; 100MHz

Alter des Universums: ca.  $13.8 \cdot 10^9$ y

# Typische Laufzeitklassen

$\mathcal{O}$ -Notation erlaubt **Klassifizierung** der Effizienz von Algorithmen

## $\Theta(1)$ : konstante Laufzeit

- ▶ unabhängig von Problemgröße
- ▶ *Beispiel*: Löschen von erstem Element in verketteter Liste

## $\Theta(\log n)$ : logarithmische Laufzeit

- ▶ Laufzeit wächst langsamer als Problemgröße
- ▶ typisch für Divide & Conquer Algorithmen
- ▶ *Beispiel*: Suchen in sortierter Liste

## $\Theta(n)$ : lineare Laufzeit

- ▶ Laufzeit wächst vergleichbar zur Problemgröße
- ▶ jedes Eingabe-Element erfordert  $\mathcal{O}(1)$  Arbeit
- ▶ *Beispiele*: Suchen in unsortierter Liste, Löschen von Element im Array

# Typische Laufzeitklassen

## $\Theta(n \log n)$ : “loglinear” Laufzeit

- ▶ Laufzeit wächst schneller als Problemgröße
- ▶ typisch für Divide & Conquer
- ▶ *Beispiele*: Quicksort, FFT

## $\Theta(n^2)$ : quadratische Laufzeit

- ▶ typisch für Algorithmen, die Element paarweise kombinieren
- ▶ *Beispiele*: Insertion Sort, Matrix-Vektor Multiplikation

## $\Theta(n^3)$ : kubische Laufzeit

- ▶ *Beispiel*: Matrix-Matrix Multiplikation

## $\Theta(2^n)$ : exponentielle Laufzeit

- ▶ auch als “unlösbar” bezeichnet (intractable)
- ▶ *Beispiel*: Traveling Salesman (kürzeste Route, so dass alle Städte exakt einmal besucht)

## Hinweise

- ▶ Man sollte asymptotische Notation nicht in Induktionsbeweisen verwenden.
- ▶ Für beliebige Konstanten  $a, b$  gilt  $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ . Deshalb ignorieren wir die Basis des Algorithmus in asymptotischer Notation.
- ▶ Für diese Vorlesung:  $\log n = \log_2 n$ , d.h., wir nehmen 2 als Standardbasis für den Logarithmus.

## Hinweise

- ▶ Man sollte asymptotische Notation nicht in Induktionsbeweisen verwenden.
- ▶ Für beliebige Konstanten  $a, b$  gilt  $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ . Deshalb ignorieren wir die Basis des Algorithmus in asymptotischer Notation.
- ▶ Für diese Vorlesung:  $\log n = \log_2 n$ , d.h., wir nehmen 2 als Standardbasis für den Logarithmus.

## Hinweise

- ▶ Man sollte asymptotische Notation nicht in Induktionsbeweisen verwenden.
- ▶ Für beliebige Konstanten  $a, b$  gilt  $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ . Deshalb ignorieren wir die Basis des Algorithmus in asymptotischer Notation.
- ▶ Für diese Vorlesung:  $\log n = \log_2 n$ , d.h., wir nehmen 2 als Standardbasis für den Logarithmus.

# Asymptotische Notation

Eine asymptotische Klassifizierung von Laufzeiten ist eine gute Möglichkeit um Effizienz von Algorithmen zu vergleichen:

- ▶ Falls die Laufzeitanalyse genau genug ist und die Laufzeit auch in der Praxis auftaucht (d.h. keine reine worst-case Schranke), dann ist ein Algorithmus mit besserer asymptotischer Laufzeit einem schwächeren für genügend großes  $n$  überlegen.
- ▶ Aber:

# Asymptotische Notation

Eine asymptotische Klassifizierung von Laufzeiten ist eine gute Möglichkeit um Effizienz von Algorithmen zu vergleichen:

- ▶ Falls die Laufzeitanalyse genau genug ist und die Laufzeit auch in der Praxis auftaucht (d.h. keine reine worst-case Schranke), dann ist ein Algorithmus mit besserer asymptotischer Laufzeit einem schwächeren für genügend großes  $n$  überlegen.
- ▶ **Aber:**
  - ▶ Algorithmus A: Laufzeit  $f(n) = 1000 \log n = \mathcal{O}(\log n)$ .
  - ▶ Algorithmus B: Laufzeit  $g(n) = \log^2 n$ .

Es gilt  $f = o(g)$ . Aber solange  $\log n \leq 1000$  ist Algorithmus B effizienter.

# Asymptotische Notation

Eine asymptotische Klassifizierung von Laufzeiten ist eine gute Möglichkeit um Effizienz von Algorithmen zu vergleichen:

- ▶ Falls die Laufzeitanalyse genau genug ist und die Laufzeit auch in der Praxis auftaucht (d.h. keine reine worst-case Schranke), dann ist ein Algorithmus mit besserer asymptotischer Laufzeit einem schwächeren für genügend großes  $n$  überlegen.
- ▶ **Aber:**
  - ▶ Algorithmus A: Laufzeit  $f(n) = 1000 \log n = \mathcal{O}(\log n)$ .
  - ▶ Algorithmus B: Laufzeit  $g(n) = \log^2 n$ .

Es gilt  $f = o(g)$ . Aber solange  $\log n \leq 1000$  ist Algorithmus B effizienter.

# Asymptotische Notation

Eine asymptotische Klassifizierung von Laufzeiten ist eine gute Möglichkeit um Effizienz von Algorithmen zu vergleichen:

- ▶ Falls die Laufzeitanalyse genau genug ist und die Laufzeit auch in der Praxis auftaucht (d.h. keine reine worst-case Schranke), dann ist ein Algorithmus mit besserer asymptotischer Laufzeit einem schwächeren für genügend großes  $n$  überlegen.
- ▶ **Aber:**
  - ▶ Algorithmus A: Laufzeit  $f(n) = 1000 \log n = \mathcal{O}(\log n)$ .
  - ▶ Algorithmus B: Laufzeit  $g(n) = \log^2 n$ .

Es gilt  $f = o(g)$ . Aber solange  $\log n \leq 1000$  ist Algorithmus B effizienter.

# Asymptotische Notation

Eine asymptotische Klassifizierung von Laufzeiten ist eine gute Möglichkeit um Effizienz von Algorithmen zu vergleichen:

- ▶ Falls die Laufzeitanalyse genau genug ist und die Laufzeit auch in der Praxis auftaucht (d.h. keine reine worst-case Schranke), dann ist ein Algorithmus mit besserer asymptotischer Laufzeit einem schwächeren für genügend großes  $n$  überlegen.
- ▶ **Aber:**
  - ▶ Algorithmus A: Laufzeit  $f(n) = 1000 \log n = \mathcal{O}(\log n)$ .
  - ▶ Algorithmus B: Laufzeit  $g(n) = \log^2 n$ .

Es gilt  $f = o(g)$ . Aber solange  $\log n \leq 1000$  ist Algorithmus B effizienter.

# Komplexität der elementaren Bausteine

## Elementarer Verarbeitungsschritt:

- ▶  $\mathcal{O}(1)$

## Sequenz:

- ▶ Addition in  $\mathcal{O}$ -Notation

## Bedingter Verarbeitungsschritt:

- ▶ Maximum von Komplexität von if und else Block, sowie
- ▶  $\mathcal{O}(1)$  für Auswertung der Bedingung

## Wiederholung:

- ▶ Anzahl Wiederholungen multipliziert mit Komplexität Schleifenkörper, sowie
- ▶ Anzahl Wiederholungen + 1 multipliziert mit  $\mathcal{O}(1)$  für Auswertung der Schleifenbedingung

# Komplexität Datenstrukturenoperationen

## Feld via Array:

- ▶ elementAt  $\mathcal{O}(1)$ , insert  $\mathcal{O}(n)$ , erase  $\mathcal{O}(n)$

## Feld via LinkedList:

- ▶ elementAt  $\mathcal{O}(n)$ , insert  $\mathcal{O}(n)$ , erase  $\mathcal{O}(n)$

## Stack via Array:

- ▶ push, pop, top alle  $\mathcal{O}(1)$

## Stack via LinkedList:

- ▶ push, pop, top alle  $\mathcal{O}(1)$

## Queue via LinkedList:

- ▶ enqueue, dequeue beide  $\mathcal{O}(1)$

# Sortieren durch Einfügen

**Gegeben:** eine Folge von ganzen Zahlen.

**Gesucht:** die zugehörige aufsteigend sortierte Folge.

**Idee:**

- ▶ speichere die Folge in einem Feld ab;
- ▶ lege ein weiteres Feld an;
- ▶ füge der Reihe nach jedes Element des ersten Felds an der richtigen Stelle in das zweite Feld ein!

⇒ Sortieren durch Einfügen (**InsertionSort**)

# Beispiel

17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

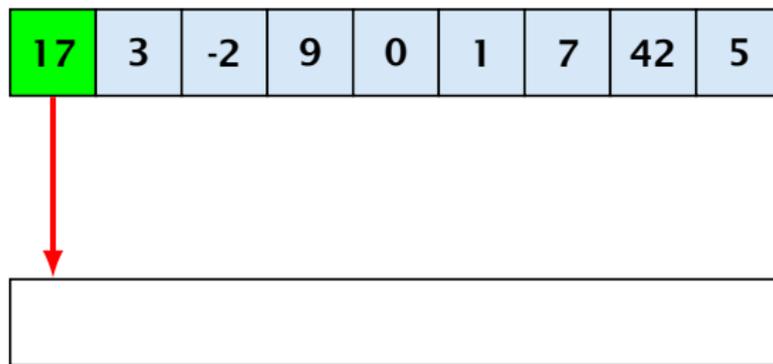
--

# Beispiel

17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

--

# Beispiel

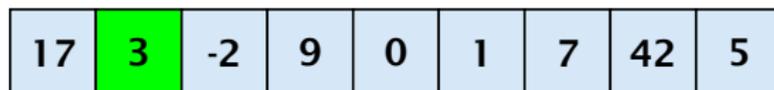


# Beispiel

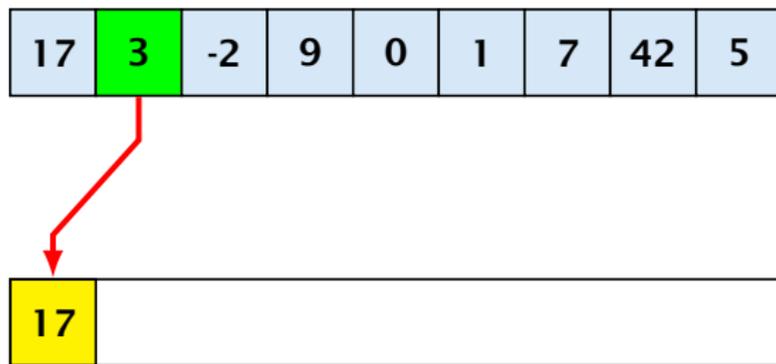
17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

17								
----	--	--	--	--	--	--	--	--

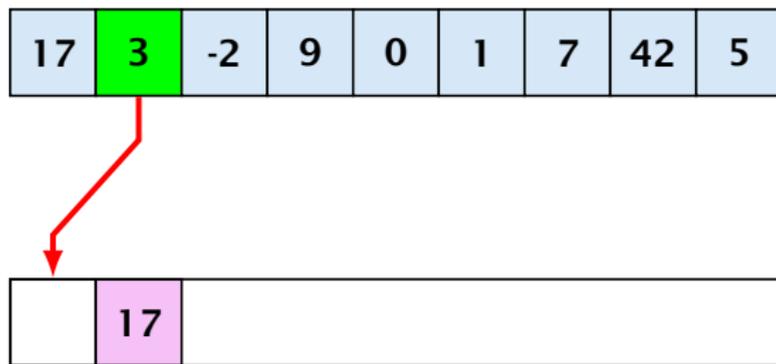
# Beispiel



# Beispiel



# Beispiel

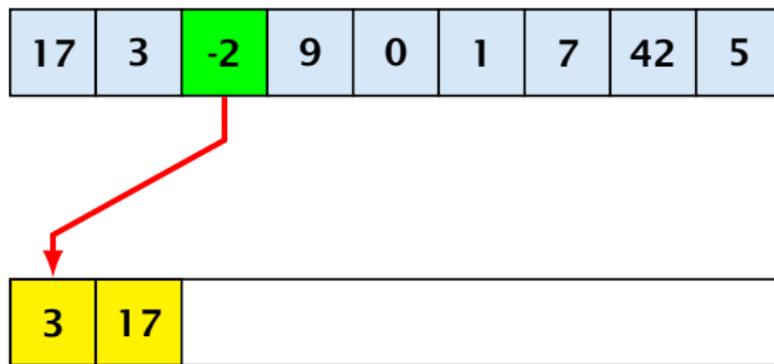


# Beispiel

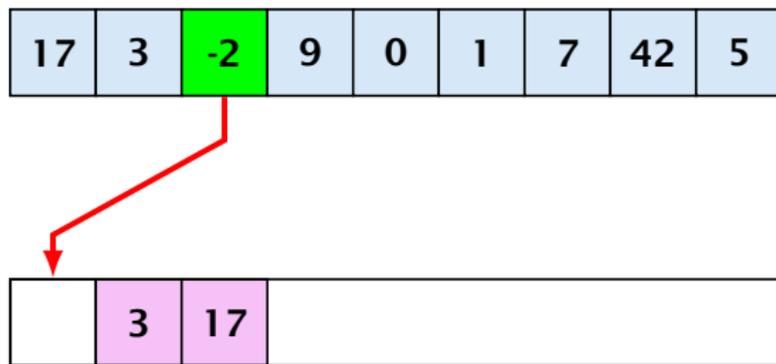
17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

3	17							
---	----	--	--	--	--	--	--	--

# Beispiel



# Beispiel

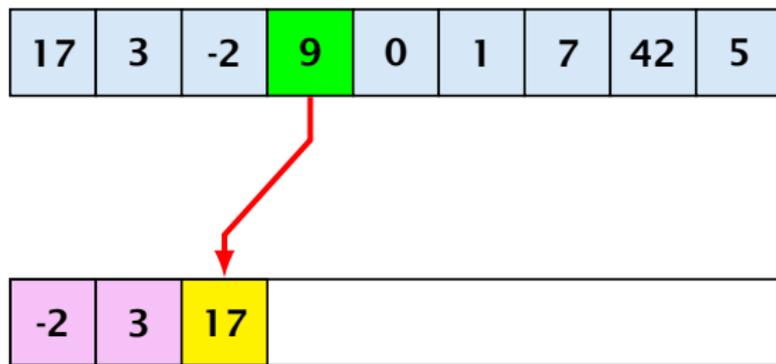


# Beispiel

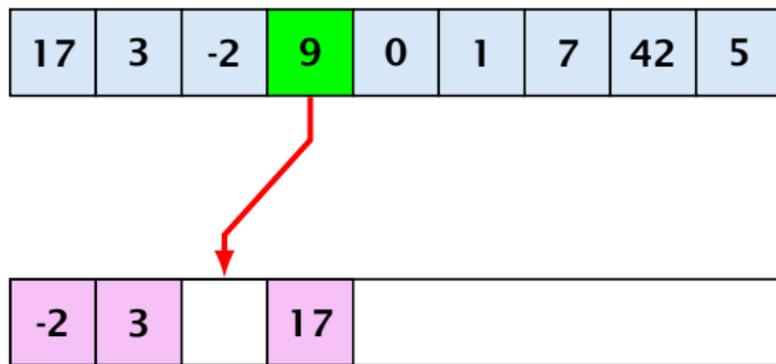
17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

-2	3	17						
----	---	----	--	--	--	--	--	--

# Beispiel



# Beispiel

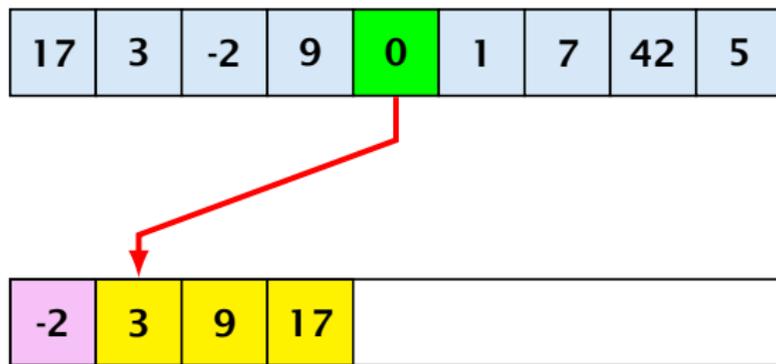


# Beispiel

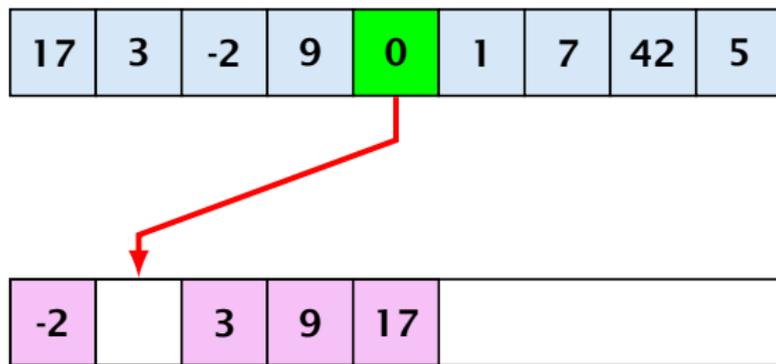
17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

-2	3	9	17					
----	---	---	----	--	--	--	--	--

# Beispiel



# Beispiel

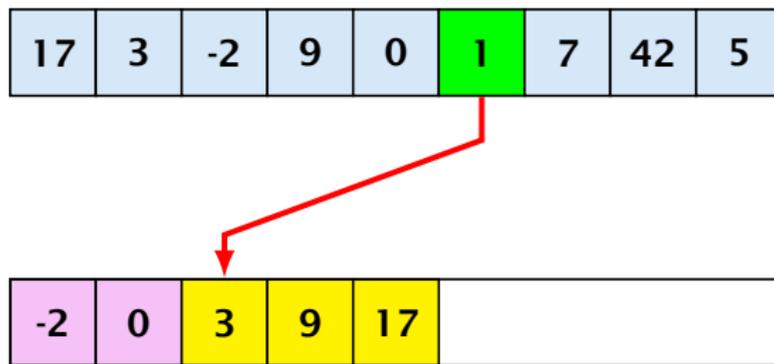


# Beispiel

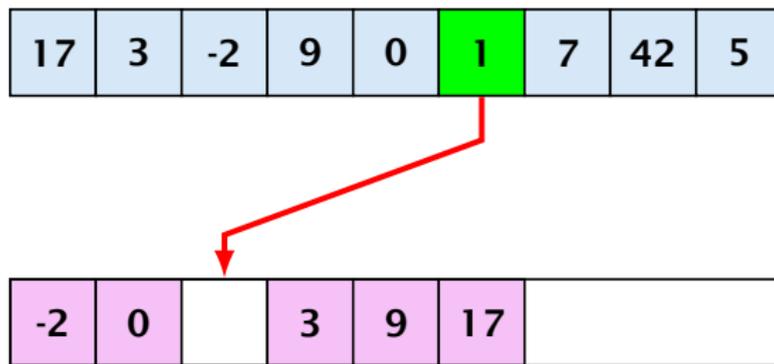
17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

-2	0	3	9	17				
----	---	---	---	----	--	--	--	--

# Beispiel



# Beispiel

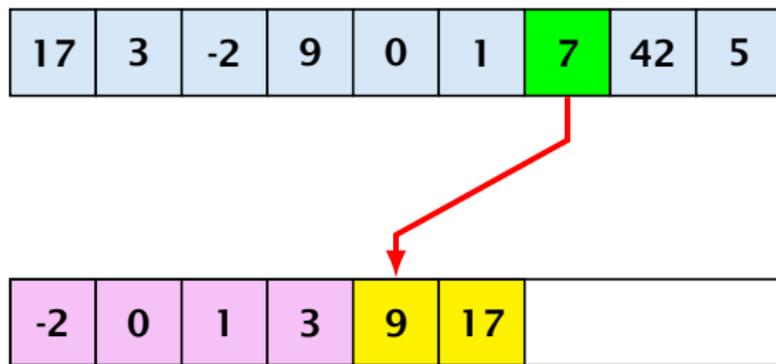


# Beispiel

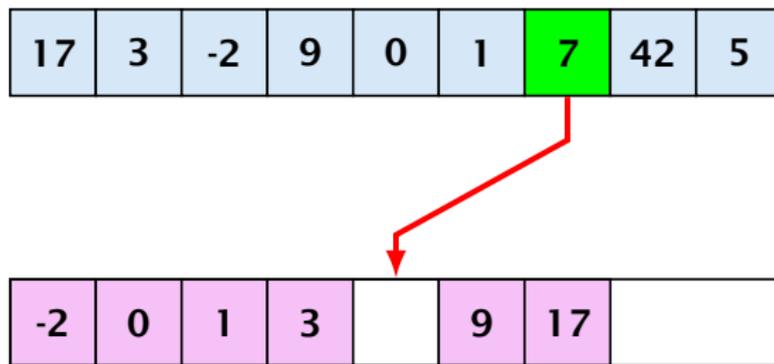
17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

-2	0	1	3	9	17	
----	---	---	---	---	----	--

# Beispiel



# Beispiel

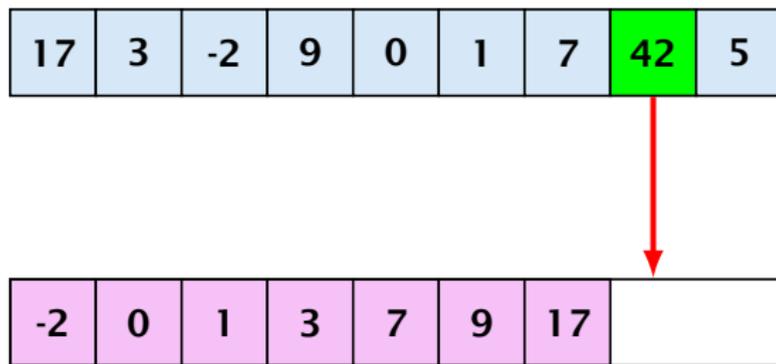


# Beispiel

17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

-2	0	1	3	7	9	17	
----	---	---	---	---	---	----	--

# Beispiel

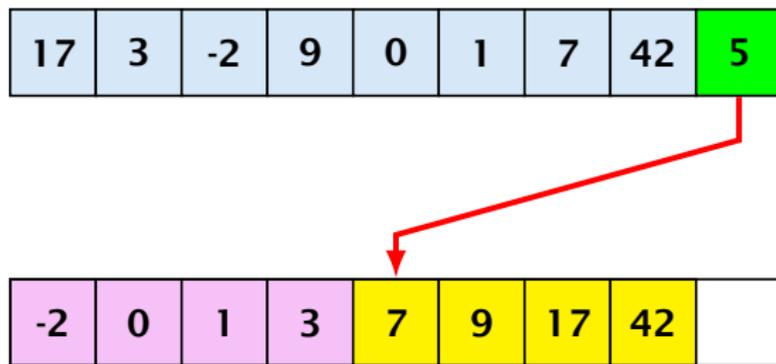


# Beispiel

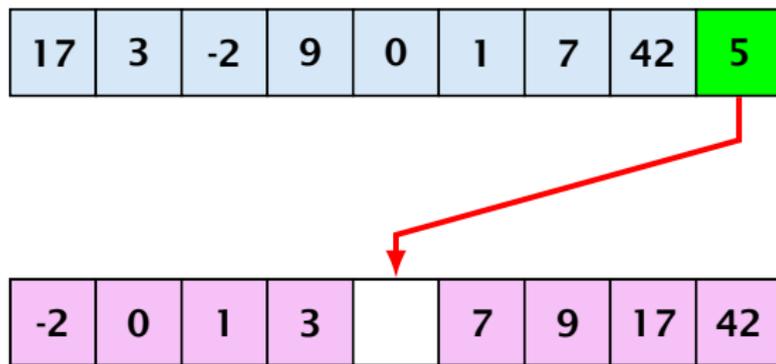
17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

-2	0	1	3	7	9	17	42	
----	---	---	---	---	---	----	----	--

# Beispiel



# Beispiel



# Beispiel

17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

-2	0	1	3	5	7	9	17	42
----	---	---	---	---	---	---	----	----

# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

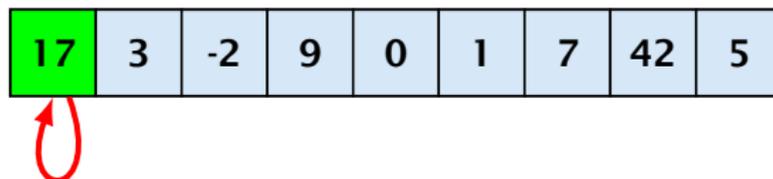
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

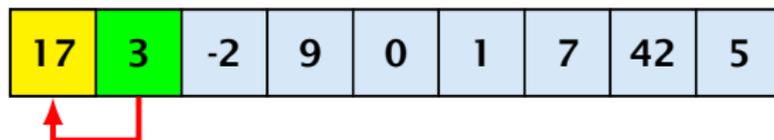
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

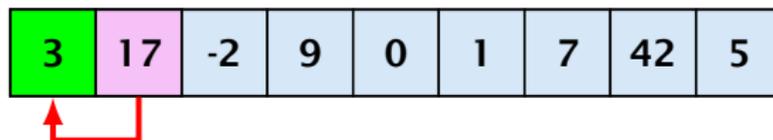
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



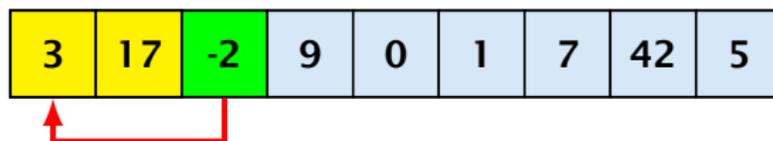
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

3	17	-2	9	0	1	7	42	5
---	----	----	---	---	---	---	----	---

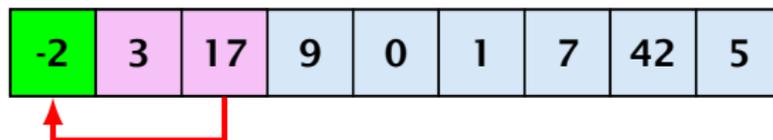
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



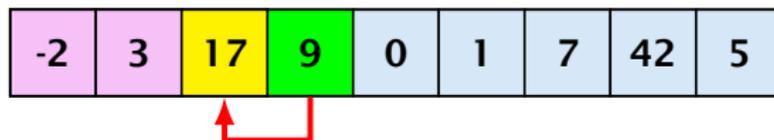
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

-2	3	17	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

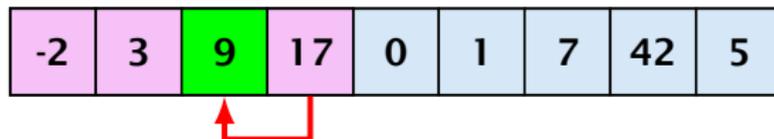
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

-2	3	9	17	0	1	7	42	5
----	---	---	----	---	---	---	----	---

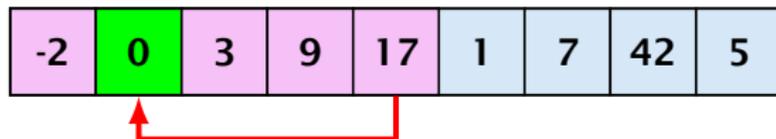
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

-2	0	3	9	17	1	7	42	5
----	---	---	---	----	---	---	----	---

# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



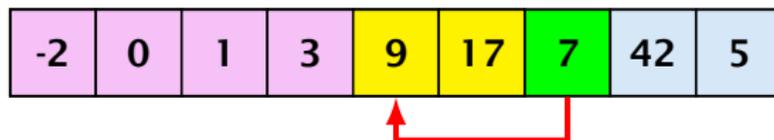
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

-2	0	1	3	9	17	7	42	5
----	---	---	---	---	----	---	----	---

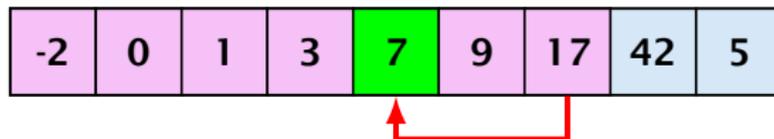
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



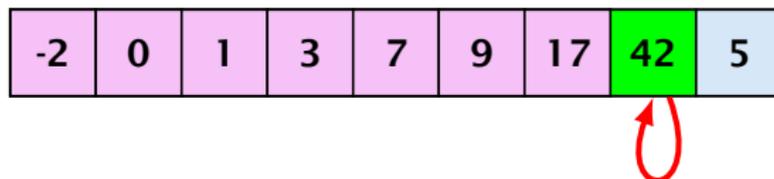
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

-2	0	1	3	7	9	17	42	5
----	---	---	---	---	---	----	----	---

# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



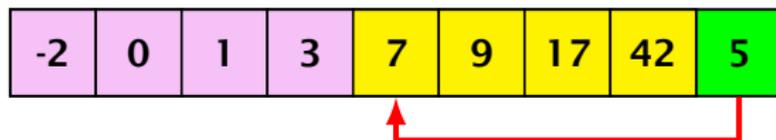
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

-2	0	1	3	7	9	17	42	5
----	---	---	---	---	---	----	----	---

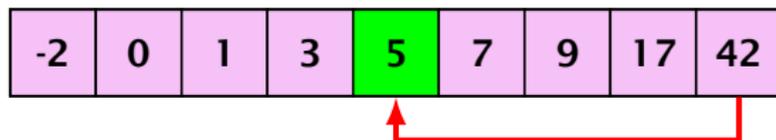
# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:



# Beispiel

Wir brauchen kein zweites Array:

-2	0	1	3	5	7	9	17	42
----	---	---	---	---	---	---	----	----

# Algorithmus: Insertion Sort

```
1 Input: Array A mit n Elementen
2 Output: Array A aufsteigend sortiert
3
4 InsertionSort(A)
5     j = 0;
6     while (j < n)
7         key = A[j];
8         i = j-1;
9         while (i >= 0 && A[i] > key)
10             A[i+1] = A[i];
11             i--;
12         A[i+1] = key;
13         j++;
```

InsertionSort

# Laufzeit InsertionSort

Kostenübersicht		
Zeile	Kosten	Anzahl
5	$\mathcal{O}(1)$	1
6	$\mathcal{O}(1)$	$n + 1$
7	$\mathcal{O}(1)$	$n - 1$
8	$\mathcal{O}(1)$	$t_j$
9	$\mathcal{O}(1)$	$t_j - 1$
10	$\mathcal{O}(1)$	$t_j - 1$
11	$\mathcal{O}(1)$	$n$
12	$\mathcal{O}(1)$	$n$

$t_j$  bezeichnet Anzahl der Abfragen der while-Bedingung in Zeile 8 für Durchlauf  $j$

```
1 Input: Array A mit Laenge n
2 Output: sortiertes Array
3
4 InsertionSort(A)
5   j = 0;
6   while (j < n)
7     key = A[j];
8     i = j-1;
9     while (i >= 0 && A[i] > key)
10      A[i+1] = A[i];
11      i--;
12      A[i+1] = key;
13      j++;
```

# Laufzeit InsertionSort

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}(1) + (n+1)\mathcal{O}(1) + (n-1)\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) \sum_{j=0}^{n-1} t_j + \\ & \mathcal{O}(1) \sum_{j=0}^{n-1} (t_j - 1) + \mathcal{O}(1) \sum_{j=0}^{n-1} (t_j - 1) + n\mathcal{O}(1) + n\mathcal{O}(1) \\ & = \mathcal{O}(1)n + \mathcal{O}(1) \sum_{j=0}^{n-1} t_j \\ & = \mathcal{O}\left(n + \sum_{j=0}^{n-1} t_j\right) \end{aligned}$$

Die Laufzeit hängt stark vom Input ab.

# Laufzeit InsertionSort

## Best-case:

Wenn das Array sortiert wird ist, ist  $t_j = 1$ .

⇒ Laufzeit:  $\mathcal{O}(n)$ .

## Worst-case:

Wenn das Array absteigend sortiert ist, ist  $t_j = j + 1$ .

⇒ Laufzeit:  $\mathcal{O}(n^2)$ .

## Beobachtung:

Wenn ein Element höchstens  $h$  Positionen von seiner Zielposition entfernt ist, dann ist  $t_j \leq h + 1$ .

⇒ Laufzeit:  $\mathcal{O}(hn)$ .

## 5 Effizienz von Algorithmen

**Gegeben:** Array  $A$  ganzer Zahlen; Element  $x$

**Gesucht:** Wo kommt  $x$  in  $A$  vor?

**Naives Vorgehen:**

- ▶ Vergleiche  $x$  der Reihe nach mit  $A[0]$ ,  $A[1]$ , usw.
- ▶ Finden wir  $i$  mit  $A[i] == x$ , geben wir  $i$  aus.
- ▶ Andernfalls geben wir  $-1$  aus: „Element nicht gefunden“!

# Naives Suchen

```
1 Input: Array A mit Laenge n; Element x
2 Output: i mit A[i] == x falls existent
3         sonst -1
4
5 find(A,x)
6     i = 0;
7     while (i < n && A[i] != x)
8         i++;
9     if (i == n)
10        return -1;
11    else
12        return i;
```

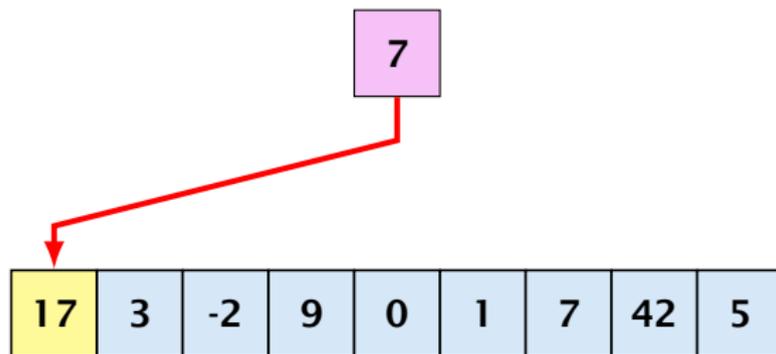
## Naives Suchen

# Beispiel

7

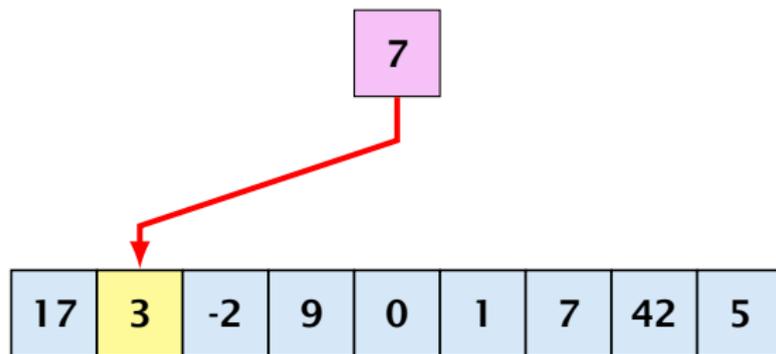
17	3	-2	9	0	1	7	42	5
----	---	----	---	---	---	---	----	---

# Beispiel



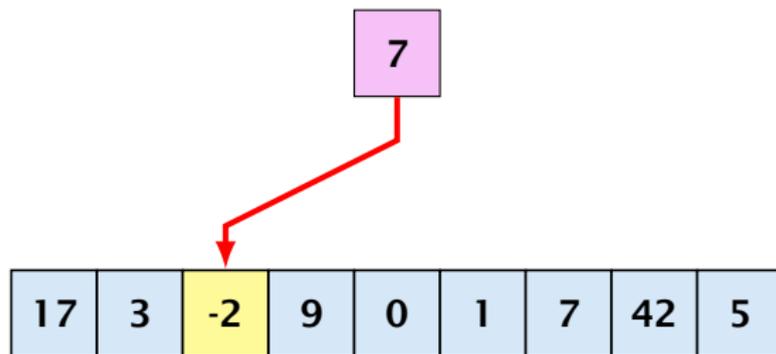
no

# Beispiel



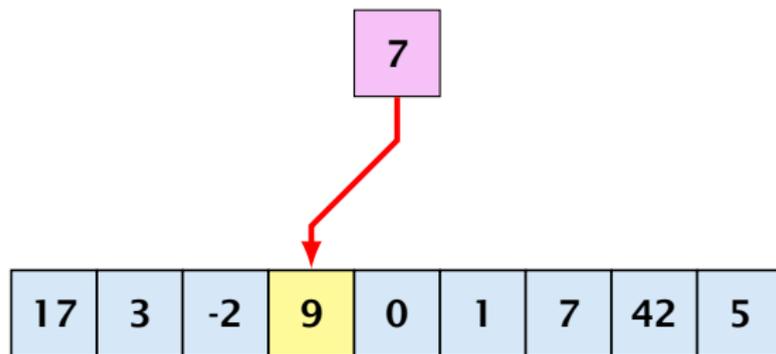
no

# Beispiel



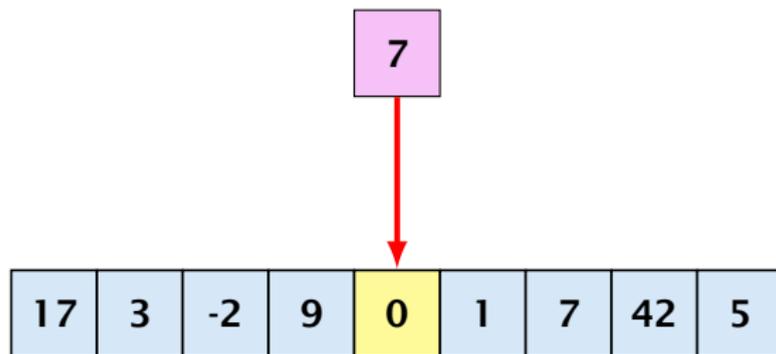
no

# Beispiel



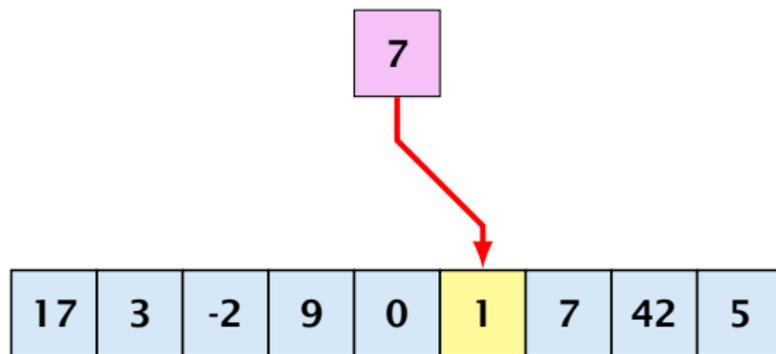
no

# Beispiel



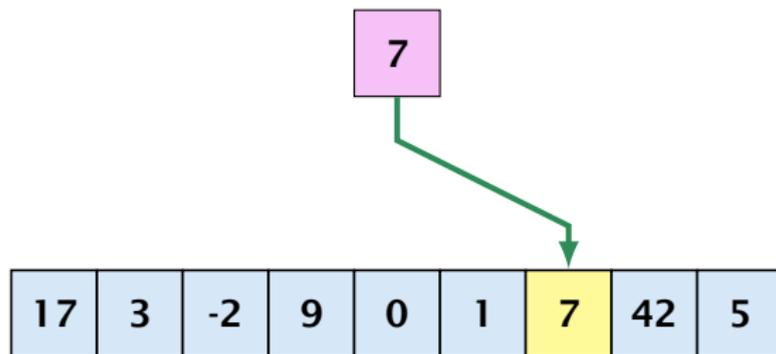
no

# Beispiel



no

# Beispiel



yes

# Laufzeit Naives Suchen

## Best-case:

Wenn  $x$  an Position 0.

⇒ Laufzeit:  $\mathcal{O}(1)$ .

## Worst-case:

Wenn  $x$  nicht vorkommt.

⇒ Laufzeit:  $\mathcal{O}(n)$ .

**...geht das besser?**

# Binäre Suche

**Annahme:** Input ist sortiert.

**Idee:**

- ▶ Vergleiche  $x$  mit dem Wert, der in der Mitte steht.
- ▶ Liegt Gleichheit vor, sind wir fertig.
- ▶ Ist  $x$  kleiner, brauchen wir nur noch links weitersuchen.
- ▶ Ist  $x$  größer, brauchen wir nur noch rechts weiter suchen.

⇒ binäre Suche

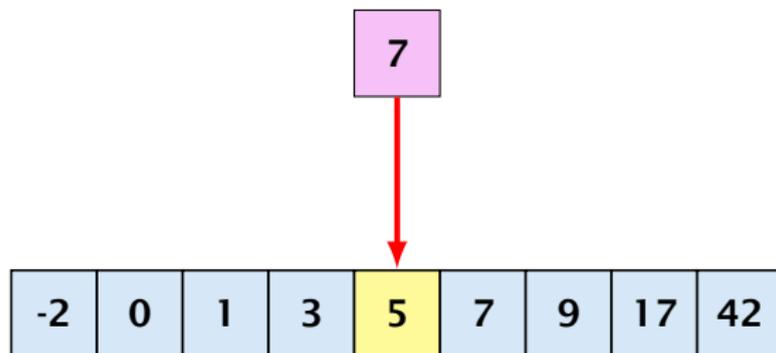
# Beispiel

7

-2	0	1	3	5	7	9	17	42
----	---	---	---	---	---	---	----	----

► wir benötigen nur **drei** Vergleiche

# Beispiel



no

► wir benötigen nur drei Vergleiche

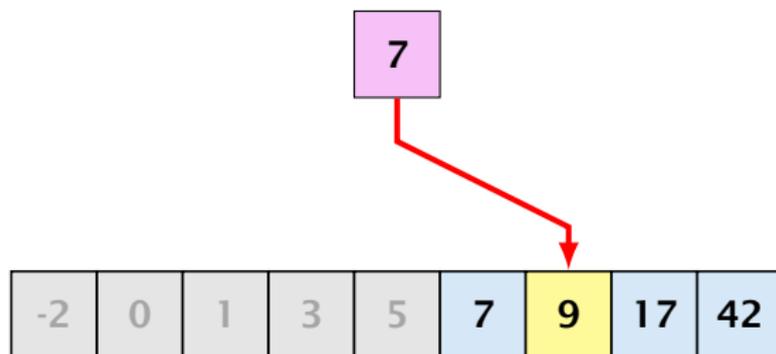
# Beispiel

7

-2	0	1	3	5	7	9	17	42
----	---	---	---	---	---	---	----	----

► wir benötigen nur **drei** Vergleiche

# Beispiel



no

► wir benötigen nur **drei** Vergleiche

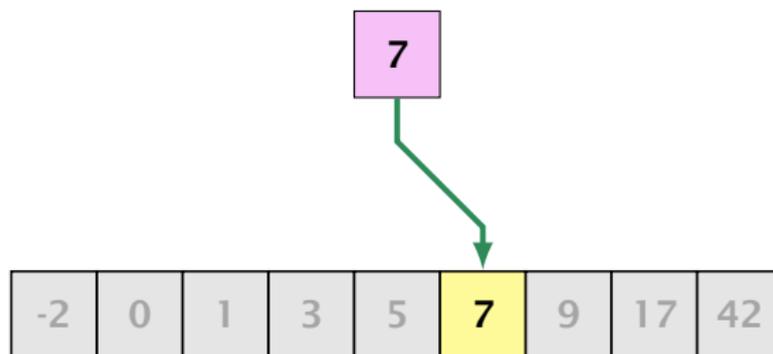
# Beispiel

7

-2	0	1	3	5	7	9	17	42
----	---	---	---	---	---	---	----	----

► wir benötigen nur **drei** Vergleiche

# Beispiel



yes

- ▶ wir benötigen nur **drei** Vergleiche

# Implementierung

```
1 Input: sortiertes Array A; Element x;
2         linker Index n1; rechter Index nr; n1<=nr
3 Output: Index i; n1 ≤ i ≤ nr mit A[i]==x falls existent
4         sonst -1
5 find(A, x, n1, nr) // Inputlänge ist n=nr-n1+1
6     t = (n1 + nr) / 2;
7     if (A[t] == x)
8         return t;
9     if (n1 == nr)
10        return -1;
11    if (x > A[t])
12        return find(A, x, t+1, nr);
13    if (n1 < t)
14        return find(A, x, n1, t-1);
15    return -1;
```

# Laufzeit Binäre Suche

**Laufzeit:**

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(1) & A[t] == x \\ \mathcal{O}(1) & n_l == n_r \\ \mathcal{O}(1) + T(nr - t - 1) & x > A[t] \\ \mathcal{O}(1) + T(nl - t - 1) & n_l < t \end{cases}$$

**oder**

$$T(n) \leq \begin{cases} \mathcal{O}(1) & n = 1 \\ \mathcal{O}(1) + T(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$$

# Laufzeit Binäre Suche

**Lösen der Rekursionsgleichung:**

$$T(n) \leq \begin{cases} \mathcal{O}(1) & n = 1 \\ \mathcal{O}(1) + T(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$$

Üblicherweise nur für  $n = 2^k$ ; z.B. durch vollständige Induktion.

Wie finden wir einen geschlossenen Ausdruck für die Laufzeit?

Dafür müssen wir die Rekursionsgleichung lösen.

Wie finden wir einen geschlossenen Ausdruck für die Laufzeit?

Dafür müssen wir die Rekursionsgleichung **lösen**.

## 1. Raten+Induktion

Man rät die richtige Lösung und beweist die Korrektheit mittels vollständiger Induktion. Man benötigt Erfahrung um richtig zu raten...

## 2. Mastertheorem

Für die meisten Rekurrenzen gibt es ein allgemeines Theorem, dass die asymptotisch korrekte Laufzeit für die jeweilige Rekurrenz angibt.

# Raten+Induktion

Zuerst müssen wir die  $\mathcal{O}$ -Notation entfernen:

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c_1 n & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Raten+Induktion

Zuerst müssen wir die  $\mathcal{O}$ -Notation entfernen:

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c_1 n & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**für  $n = 2^k$ :**

Für diesen Fall können wir stattdessen die folgende Rekursionsgleichung betrachten:

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 n & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Raten+Induktion

Zuerst müssen wir die  $\mathcal{O}$ -Notation entfernen:

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c_1 n & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**für  $n = 2^k$ :**

Für diesen Fall können wir stattdessen die folgende Rekursionsgleichung betrachten:

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 n & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man rät die richtige Lösung und beweist, dass durch Einsetzen, dass diese Lösung korrekt ist.

## Raten+Induktion

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

## Raten+Induktion

Ansatz:  $T(n) \leq a \log n + b$ .

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

## Raten+Induktion

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

## Raten+Induktion

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

▶ **Anfang** ( $n = 1$ ):

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

## Raten+Induktion

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

- ▶ **Anfang** ( $n = 1$ ): **wahr** falls  $b \geq c_2$ .

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Raten+Induktion

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

- ▶ **Anfang** ( $n = 1$ ): **wahr** falls  $b \geq c_2$ .
- ▶ **Induktionsschritt**  $1, \dots, n - 1 \rightarrow n$ :

# Raten+Induktion

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

- ▶ **Anfang** ( $n = 1$ ): **wahr** falls  $b \geq c_2$ .
- ▶ **Induktionsschritt**  $1, \dots, n - 1 \rightarrow n$ :

Angenommen Aussage wahr für  $n' \in \{1, \dots, n - 1\}$ , und  $n > 1$ . Wir beweisen sie für  $n$ :

# Raten+Induktion

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

- ▶ **Anfang** ( $n = 1$ ): **wahr** falls  $b \geq c_2$ .
- ▶ **Induktionsschritt**  $1, \dots, n - 1 \rightarrow n$ :

Angenommen Aussage wahr für  $n' \in \{1, \dots, n - 1\}$ , und  $n > 1$ . Wir beweisen sie für  $n$ :

$$T(n) \leq T\left(\frac{n}{2}\right) + c_1$$

# Raten+Induktion

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

- ▶ **Anfang** ( $n = 1$ ): **wahr** falls  $b \geq c_2$ .
- ▶ **Induktionsschritt**  $1, \dots, n - 1 \rightarrow n$ :

Angenommen Aussage wahr für  $n' \in \{1, \dots, n - 1\}$ , und  $n > 1$ . Wir beweisen sie für  $n$ :

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{2}\right) + c_1 \\ &\leq \left(a \log \frac{n}{2} + b\right) + c_1 \end{aligned}$$

# Raten+Induktion

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

- ▶ **Anfang** ( $n = 1$ ): **wahr** falls  $b \geq c_2$ .
- ▶ **Induktionsschritt**  $1, \dots, n - 1 \rightarrow n$ :

Angenommen Aussage wahr für  $n' \in \{1, \dots, n - 1\}$ , und  $n > 1$ . Wir beweisen sie für  $n$ :

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{2}\right) + c_1 \\ &\leq \left(a \log \frac{n}{2} + b\right) + c_1 \\ &= a(\log n - 1) + b + c_1 \end{aligned}$$

# Raten+Induktion

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

- ▶ **Anfang** ( $n = 1$ ): **wahr** falls  $b \geq c_2$ .
- ▶ **Induktionsschritt**  $1, \dots, n - 1 \rightarrow n$ :

Angenommen Aussage wahr für  $n' \in \{1, \dots, n - 1\}$ , und  $n > 1$ . Wir beweisen sie für  $n$ :

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{2}\right) + c_1 \\ &\leq \left(a \log \frac{n}{2} + b\right) + c_1 \\ &= a(\log n - 1) + b + c_1 \\ &= a \log n + (c_1 - a) + b \end{aligned}$$

# Raten+Induktion

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

- ▶ **Anfang** ( $n = 1$ ): **wahr** falls  $b \geq c_2$ .
- ▶ **Induktionsschritt**  $1, \dots, n - 1 \rightarrow n$ :

Angenommen Aussage wahr für  $n' \in \{1, \dots, n - 1\}$ , und  $n > 1$ . Wir beweisen sie für  $n$ :

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{2}\right) + c_1 \\ &\leq \left(a \log \frac{n}{2} + b\right) + c_1 \\ &= a(\log n - 1) + b + c_1 \\ &= a \log n + (c_1 - a) + b \\ &\leq a \log n + b \end{aligned}$$

# Raten+Induktion

$$T(n) \leq \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + c_1 & n > 1 \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Ansatz:**  $T(n) \leq a \log n + b$ .

**Beweis.** (durch Induktion)

- ▶ **Anfang** ( $n = 1$ ): **wahr** falls  $b \geq c_2$ .
- ▶ **Induktionsschritt**  $1, \dots, n-1 \rightarrow n$ :

Angenommen Aussage wahr für  $n' \in \{1, \dots, n-1\}$ , und  $n > 1$ . Wir beweisen sie für  $n$ :

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{2}\right) + c_1 \\ &\leq \left(a \log \frac{n}{2} + b\right) + c_1 \\ &= a(\log n - 1) + b + c_1 \\ &= a \log n + (c_1 - a) + b \\ &\leq a \log n + b \end{aligned}$$

Gilt falls  $a \geq c_1$ .

# Mastertheorem

## Lemma 3

Seien  $a \geq 1, b \geq 1$  und  $\epsilon > 0$  **Konstanten**. Betrachte die Rekurrenz

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) .$$

### 1. Fall:

Falls  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)-\epsilon})$  gilt  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ .

### 2. Fall:

Falls  $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \log^k n)$  gilt  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$ ,  
 $k \geq 0$ .

# Mastertheorem

Wir beweisen das Mastertheorem für den Fall  $n = b^l$ , und nehmen an, dass der nichtrekursive Fall für Problemgröße  $1$  Kosten  $1$  verursacht.

# Der Rekursionsbaum

Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:

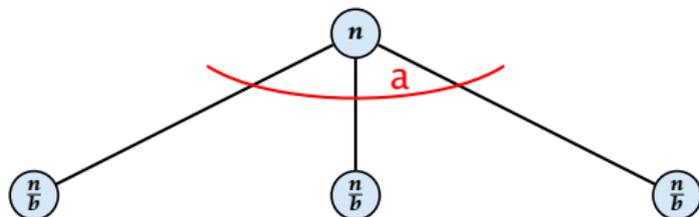
# Der Rekursionsbaum

Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:



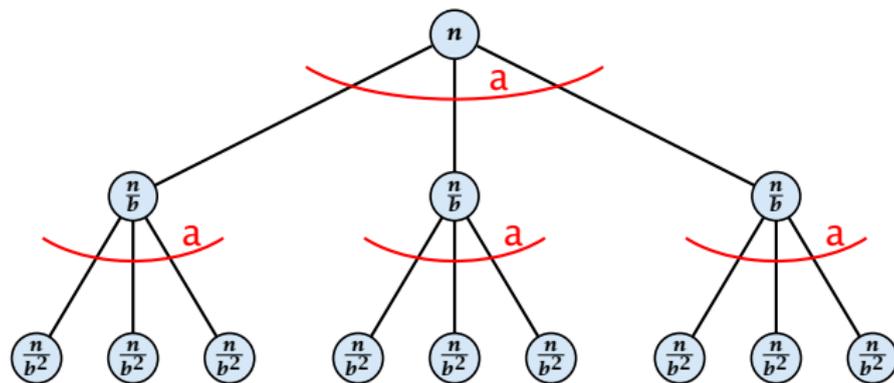
# Der Rekursionsbaum

Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:



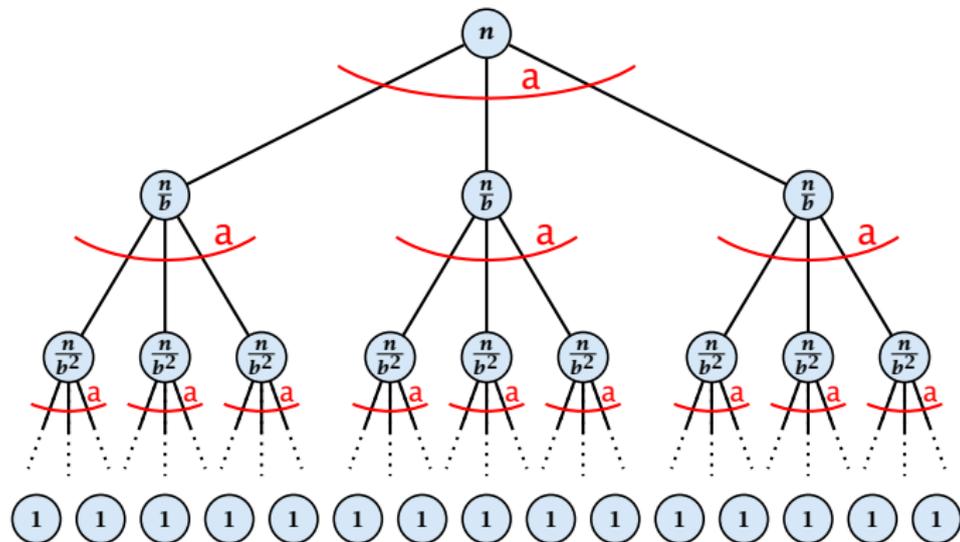
# Der Rekursionsbaum

Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:



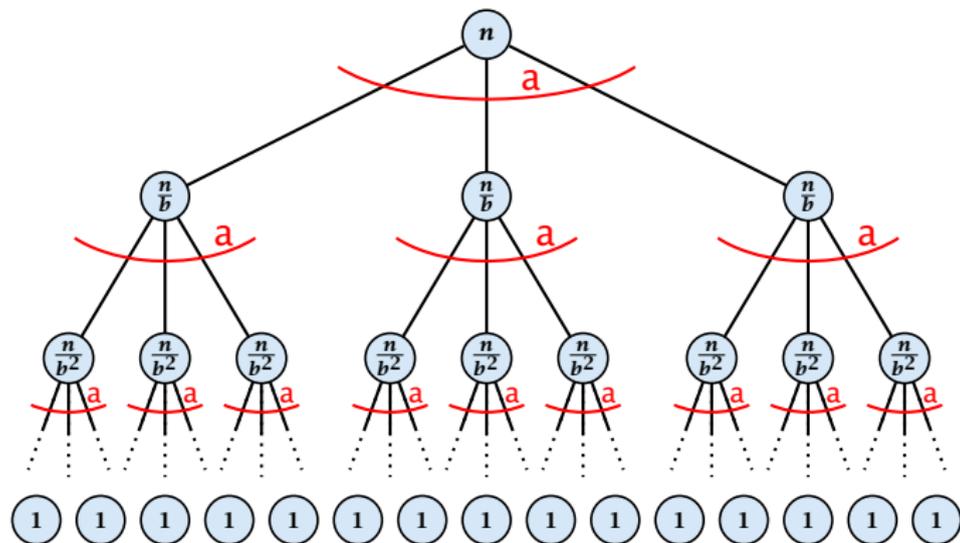
# Der Rekursionsbaum

Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:



# Der Rekursionsbaum

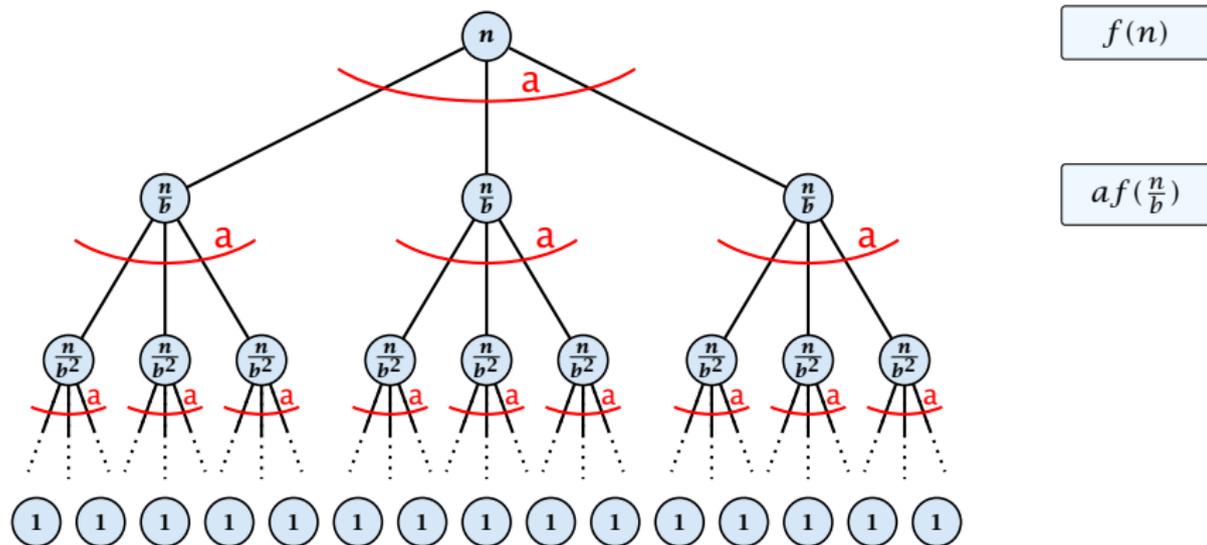
Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:



$f(n)$

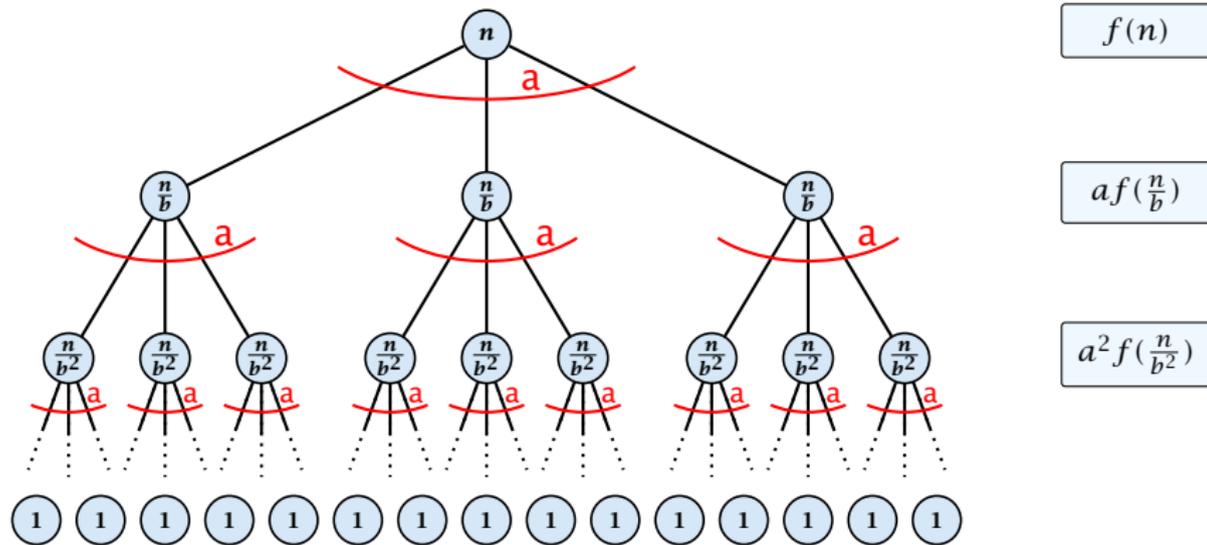
# Der Rekursionsbaum

Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:



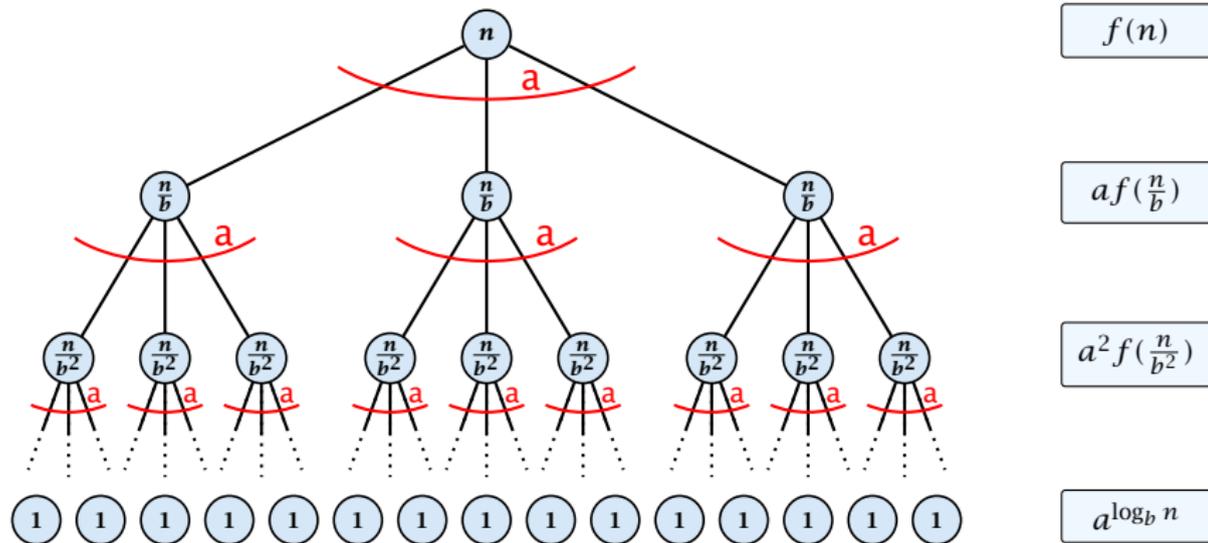
# Der Rekursionsbaum

Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:



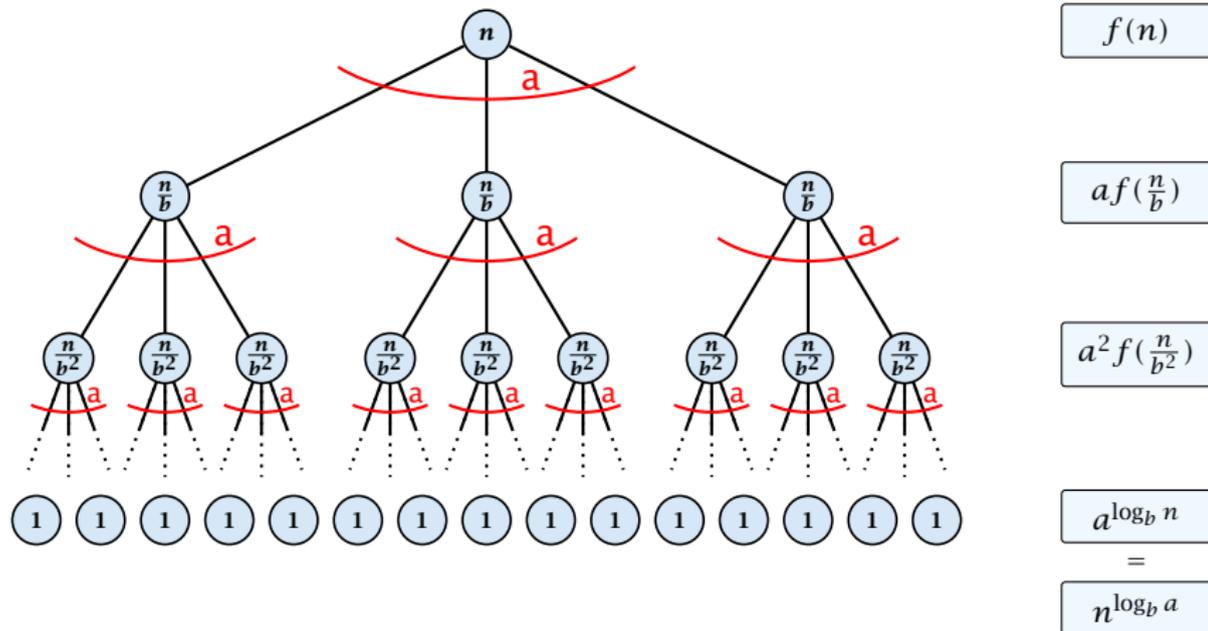
# Der Rekursionsbaum

Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:



# Der Rekursionsbaum

Die Laufzeit eines rekursiven Algorithmus kann durch einen Rekursionsbaum veranschaulicht werden:



# Mastertheorem

Das heißt unsere Kosten sind

$$T(n) = n^{\log_b a} + \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) .$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$T(n) = n^{\log_b a}$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$T(n) - n^{\log_b a} = \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} \end{aligned}$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} \end{aligned}$$

$$b^{-i(\log_b a - \epsilon)} = b^{\epsilon i} (b^{\log_b a})^{-i} = b^{\epsilon i} a^{-i}$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} \end{aligned}$$

$$\boxed{b^{-i(\log_b a - \epsilon)} = b^{\epsilon i} (b^{\log_b a})^{-i} = b^{\epsilon i} a^{-i}} = cn^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (b^{\epsilon})^i$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} \end{aligned}$$

$$\boxed{b^{-i(\log_b a - \epsilon)} = b^{\epsilon i} (b^{\log_b a})^{-i} = b^{\epsilon i} a^{-i}} = cn^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (b^{\epsilon})^i$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}}$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} \end{aligned}$$

$$\boxed{b^{-i(\log_b a - \epsilon)} = b^{\epsilon i} (b^{\log_b a})^{-i} = b^{\epsilon i} a^{-i}} = cn^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (b^\epsilon)^i$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}} = cn^{\log_b a - \epsilon} (b^{\epsilon \log_b n} - 1) / (b^\epsilon - 1)$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{-i(\log_b a - \epsilon)} &= b^{\epsilon i} (b^{\log_b a})^{-i} = b^{\epsilon i} a^{-i} \\ &= cn^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (b^\epsilon)^i \\ \sum_{i=0}^k q^i &= \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \\ &= cn^{\log_b a - \epsilon} (b^{\epsilon \log_b n} - 1) / (b^\epsilon - 1) \\ &= cn^{\log_b a - \epsilon} (n^\epsilon - 1) / (b^\epsilon - 1) \end{aligned}$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{b^{-i(\log_b a - \epsilon)} = b^{\epsilon i} (b^{\log_b a})^{-i} = b^{\epsilon i} a^{-i}} &= cn^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (b^{\epsilon})^i \\ \boxed{\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}} &= cn^{\log_b a - \epsilon} (b^{\epsilon \log_b n} - 1) / (b^{\epsilon} - 1) \\ &= cn^{\log_b a - \epsilon} (n^{\epsilon} - 1) / (b^{\epsilon} - 1) \\ &= \frac{c}{b^{\epsilon} - 1} n^{\log_b a} (n^{\epsilon} - 1) / (n^{\epsilon}) \end{aligned}$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{b^{-i(\log_b a - \epsilon)} = b^{\epsilon i} (b^{\log_b a})^{-i} = b^{\epsilon i} a^{-i}} &= cn^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (b^\epsilon)^i \\ \boxed{\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}} &= cn^{\log_b a - \epsilon} (b^{\epsilon \log_b n} - 1) / (b^\epsilon - 1) \\ &= cn^{\log_b a - \epsilon} (n^\epsilon - 1) / (b^\epsilon - 1) \\ &= \frac{c}{b^\epsilon - 1} n^{\log_b a} (n^\epsilon - 1) / (n^\epsilon) \end{aligned}$$

Also,

$$T(n) \leq \left( \frac{c}{b^\epsilon - 1} + 1 \right) n^{\log_b(a)}$$

Fall 1. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a - \epsilon}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{b^{-i(\log_b a - \epsilon)} = b^{\epsilon i} (b^{\log_b a})^{-i} = b^{\epsilon i} a^{-i}} &= cn^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (b^\epsilon)^i \\ \boxed{\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}} &= cn^{\log_b a - \epsilon} (b^{\epsilon \log_b n} - 1) / (b^\epsilon - 1) \\ &= cn^{\log_b a - \epsilon} (n^\epsilon - 1) / (b^\epsilon - 1) \\ &= \frac{c}{b^\epsilon - 1} n^{\log_b a} (n^\epsilon - 1) / (n^\epsilon) \end{aligned}$$

Also,

$$T(n) \leq \left( \frac{c}{b^\epsilon - 1} + 1 \right) n^{\log_b(a)} \quad \Rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}).$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a}$ .

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a}$ .

$$T(n) = n^{\log_b a}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a}$ .

$$T(n) - n^{\log_b a} = \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \\ &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} 1 \end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned}T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\&\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \\&= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} 1 \\&= cn^{\log_b a} \log_b n\end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned}T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\&\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \\&= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} 1 \\&= cn^{\log_b a} \log_b n\end{aligned}$$

Also,

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a} \log_b n)$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned}T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\&\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \\&= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} 1 \\&= cn^{\log_b a} \log_b n\end{aligned}$$

Also,

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a} \log_b n)$$

$$\Rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a} \log n).$$

Fall 2. Sei  $f(n) \geq cn^{\log_b a}$ .

Fall 2. Sei  $f(n) \geq cn^{\log_b a}$ .

$$T(n) - n^{\log_b a}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \geq cn^{\log_b a}$ .

$$T(n) - n^{\log_b a} = \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

Fall 2. Sei  $f(n) \geq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\geq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \geq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\geq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \\ &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} 1 \end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \geq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned}T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\geq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \\ &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} 1 \\ &= cn^{\log_b a} \log_b n\end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \geq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned}T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\geq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \\ &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} 1 \\ &= cn^{\log_b a} \log_b n\end{aligned}$$

Also,

$$T(n) = \Omega(n^{\log_b a} \log_b n)$$

Fall 2. Sei  $f(n) \geq cn^{\log_b a}$ .

$$\begin{aligned}T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\&\geq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \\&= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} 1 \\&= cn^{\log_b a} \log_b n\end{aligned}$$

Also,

$$T(n) = \Omega(n^{\log_b a} \log_b n)$$

$$\Rightarrow T(n) = \Omega(n^{\log_b a} \log n).$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$T(n) = n^{\log_b a}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$T(n) - n^{\log_b a} = \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \cdot \left(\log_b\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \cdot \left(\log_b\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \end{aligned}$$

$$n = b^\ell \Rightarrow \ell = \log_b n$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \cdot \left(\log_b\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \end{aligned}$$

$$\boxed{n = b^\ell \Rightarrow \ell = \log_b n} = cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(\log_b\left(\frac{b^\ell}{b^i}\right)\right)^k$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \cdot \left(\log_b\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \end{aligned}$$

$$n = b^\ell \Rightarrow \ell = \log_b n$$

$$\begin{aligned} &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(\log_b\left(\frac{b^\ell}{b^i}\right)\right)^k \\ &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} (\ell - i)^k \end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \cdot \left(\log_b\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \end{aligned}$$

$$n = b^\ell \Rightarrow \ell = \log_b n$$

$$\begin{aligned} &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(\log_b\left(\frac{b^\ell}{b^i}\right)\right)^k \\ &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} (\ell - i)^k \\ &= cn^{\log_b a} \sum_{i=1}^{\ell} i^k \end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \cdot \left(\log_b \left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \end{aligned}$$

$$n = b^\ell \Rightarrow \ell = \log_b n$$

$$= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(\log_b \left(\frac{b^\ell}{b^i}\right)\right)^k$$

$$= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} (\ell - i)^k$$

$$= cn^{\log_b a} \sum_{i=1}^{\ell} i^k \approx \frac{1}{k} \ell^{k+1}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \cdot \left(\log_b\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \end{aligned}$$

$$n = b^\ell \Rightarrow \ell = \log_b n$$

$$\begin{aligned} &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(\log_b\left(\frac{b^\ell}{b^i}\right)\right)^k \\ &= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} (\ell - i)^k \\ &= cn^{\log_b a} \sum_{i=1}^{\ell} i^k \\ &\approx \frac{c}{k} n^{\log_b a} \ell^{k+1} \end{aligned}$$

Fall 2. Sei  $f(n) \leq cn^{\log_b a} (\log_b(n))^k$ .

$$\begin{aligned} T(n) - n^{\log_b a} &= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &\leq c \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \cdot \left(\log_b\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \end{aligned}$$

$$n = b^\ell \Rightarrow \ell = \log_b n$$

$$= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(\log_b\left(\frac{b^\ell}{b^i}\right)\right)^k$$

$$= cn^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\ell-1} (\ell - i)^k$$

$$= cn^{\log_b a} \sum_{i=1}^{\ell} i^k$$

$$\approx \frac{c}{k} n^{\log_b a} \ell^{k+1}$$

$$\Rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a} \log^{k+1} n).$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ A \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ B \\ \hline \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

1	1	0	1	1	0	1	0	1	$A$
1	0	0	0	1	0	0	1	1	$B$
<hr/>									
								1	

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

1	1	0	1	1	0	1	0	1	$A$
1	0	0	0	1	0	0	1	1	$B$
<hr/>									
								0	

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ A \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ B \\ \hline \phantom{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ } 0 \end{array}$$

The diagram illustrates the addition of two 10-bit integers, A and B. The bits of A are 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1. The bits of B are 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1. A horizontal line is drawn under the 8th bit of B. A vertical box highlights the 8th bit of A (0) and the 8th bit of B (1), with a '1' written below the box. Below the horizontal line, a '0' is written under the 9th bit position.

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & & B \\ \hline & & & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & 0 & 0 & & \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & B \\ \hline & & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 0 & & \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & B \\ \hline & & & & & & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

The diagram illustrates the addition of two 9-bit integers, A and B, to produce a 9-bit result. The numbers are aligned to the right. A horizontal line is drawn under the numbers. The result is shown below the line, with a vertical line separating the carry bits from the result bits. The carry bits are 1, 1, and 1, which are added to the next higher bit positions. The result bits are 0, 0, and 0.

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & A \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & B \\ \hline & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

The diagram illustrates the addition of two 10-bit integers, A and B. A vertical blue box highlights the 6th bit position (from the right), which contains a '0' in both A and B. Below the horizontal line, the result of the addition is shown as '0 0 0' in the 6th, 7th, and 8th bit positions, indicating a carry of 1 from the 6th bit to the 7th, and a carry of 1 from the 7th bit to the 8th.

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & B \\ \hline & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & B \\ \hline & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & B \\ \hline & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integern konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & B \\ \hline & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & B \\ \hline & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

The diagram illustrates the addition of two 9-bit integers, A and B, to produce a 9-bit result. The numbers are aligned by their least significant bits. A vertical line is drawn under the 4th bit position. The result is shown below the line, with a carry of 1 from the 4th bit position to the 5th bit position. The 4th bit of the result is 0, and the 5th bit is 0. The 6th bit is 1, and the 7th, 8th, and 9th bits are 0, 0, and 0 respectively.





## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

1	1	0	1	1	0	1	0	1	$A$
1	0	0	0	1	0	0	1	1	$B$
<hr/>									
	0	1	1	0	1	1	1		
		1	0	0	1	0	0	0	

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integern konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{rcccccccc} & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & A \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & & B \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \end{array}$$

The diagram shows the addition of two 10-bit integers, A and B, to produce a 10-bit result. The bits of A are 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1. The bits of B are 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1. The result bits are 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0. A light blue box highlights the first two bits of the result, '11', which correspond to the first two bits of both A and B. Below the first two bits of A and B, the bit positions are labeled with subscripts: 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1.

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

The diagram illustrates the addition of two 8-bit integers, A and B, to produce an 8-bit result. The numbers are aligned to the right, with a horizontal line below B. A vertical light blue box highlights the leftmost bit (the 8th bit) of both A and B, and the corresponding bit of the result. The bits of A are 1 1 0 1 1 0 1 0 1, and the bits of B are 1 0 0 0 1 0 0 1 1. The result bits are 1 1 0 0 1 0 0 0. The carry bits are 0 0 1 1 0 1 1 1.

1	1	0	1	1	0	1	0	1	$A$
1	0	0	0	1	0	0	1	1	$B$
<hr/>									
1	1	0	0	1	0	0	0		

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \quad A \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \quad B \\ \hline 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

	1	1	0	1	1	0	1	0	1	$A$
	1	0	0	0	1	0	0	1	1	$B$
	<hr/>									
	0	1	1	0	0	1	0	0	0	

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integern konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

		1	1	0	1	1	0	1	0	1	$A$
		1	0	0	0	1	0	0	1	1	$B$
		<hr/>									
	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten zwei  $n$ -bit Integer multiplizieren, aber unsere Register können nur Operationen auf Integer konstanter Länge ausführen.

Dafür müssen wir zunächst zwei Zahlen  $A$  and  $B$  addieren können:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ A \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ B \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

Das heißt wir können zwei  $n$ -bit Integer in Zeit  $\mathcal{O}(n)$  addieren.

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 10001 \times 1011 \\ \hline \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ \boxed{1} \\ \hline \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} \phantom{0\ 0\ 0\ 0\ 0} 0\ 0\ 0 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{array}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{array}$$

**Laufzeit:**

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{array}$$

**Laufzeit:**

- ▶ Zwischenergebnisse berechnen:  $\mathcal{O}(nm)$ .

## Beispiel: Integermultiplikation

Angenommen wir möchten ein  $n$ -bit Integer  $A$  und ein  $m$ -bit Integer  $B$  ( $m \leq n$ ) multiplizieren.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \phantom{1\ 0\ 0\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{array}$$

### Laufzeit:

- ▶ Zwischenergebnisse berechnen:  $\mathcal{O}(nm)$ .
- ▶ Addieren von  $m$  Zahlen der Länge  $\leq 2n$ :  
 $\mathcal{O}((m+n)m) = \mathcal{O}(nm)$ .

# Beispiel: Integermultiplikation

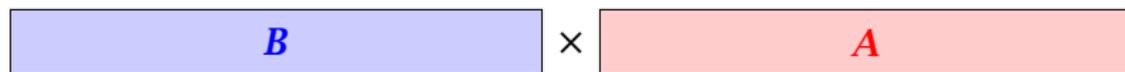
**Ein rekursiver Ansatz:**

Angenommen die Integer  $A$  und  $B$  haben Länge  $n = 2^k$ .

# Beispiel: Integermultiplikation

Ein rekursiver Ansatz:

Angenommen die Integer  $A$  und  $B$  haben Länge  $n = 2^k$ .



# Beispiel: Integermultiplikation

Ein rekursiver Ansatz:

Angenommen die Integer  $A$  und  $B$  haben Länge  $n = 2^k$ .

$$\boxed{b_{n-1} \quad \dots \quad b_0} \times \boxed{a_{n-1} \quad \dots \quad a_0}$$

# Beispiel: Integermultiplikation

Ein rekursiver Ansatz:

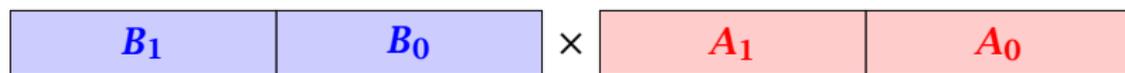
Angenommen die Integer  $A$  und  $B$  haben Länge  $n = 2^k$ .

$$\boxed{b_{n-1} \quad \dots \quad b_{\frac{n}{2}} \quad b_{\frac{n}{2}-1} \quad \dots \quad b_0} \times \boxed{a_{n-1} \quad \dots \quad a_{\frac{n}{2}} \quad a_{\frac{n}{2}-1} \quad \dots \quad a_0}$$

# Beispiel: Integermultiplikation

Ein rekursiver Ansatz:

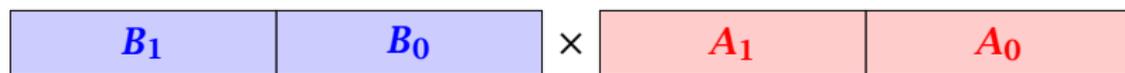
Angenommen die Integer  $A$  und  $B$  haben Länge  $n = 2^k$ .



# Beispiel: Integermultiplikation

Ein rekursiver Ansatz:

Angenommen die Integer  $A$  und  $B$  haben Länge  $n = 2^k$ .



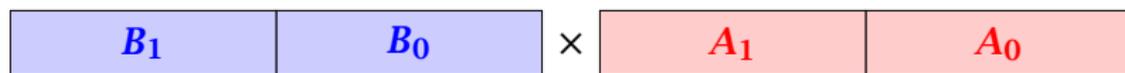
Dann gilt

$$A = A_1 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + A_0 \text{ und } B = B_1 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + B_0$$

# Beispiel: Integermultiplikation

Ein rekursiver Ansatz:

Angenommen die Integer  $A$  und  $B$  haben Länge  $n = 2^k$ .



Dann gilt

$$A = A_1 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + A_0 \text{ und } B = B_1 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + B_0$$

Also,

$$A \cdot B = A_1 B_1 \cdot 2^n + (A_1 B_0 + A_0 B_1) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + A_0 B_0$$

## Beispiel: Integermultiplikation

```
1 Input: Zahlen A, B, repräsentiert durch Bitarrays
2       der Länge n
3 Output: Bitarray, das A*B enthält
4
5 mult(A, B, n)
6     if (n == 1)
7         return new int(A[0]*B[0]);
8     split(A,A0,A1);
9     split(B,B0,B1);
10    Z2 = mult(A1,B1,n/2);
11    Z1 = mult(A0,B1,n/2) + mult(A1,B0,n/2);
12    Z0 = mult(A0,B0,n/2);
13    return Z2*2n + Z1*2n/2 + Z0;
```

Wir erhalten folgende Rekurrenzgleichung:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) .$$

# Beispiel: Integermultiplikation

**Mastertheorem:** Rekurrenz:  $T[n] = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ .

- ▶ Fall 1:  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ Fall 2:  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

# Beispiel: Integermultiplikation

**Mastertheorem:** Rekurrenz:  $T[n] = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ .

- ▶ Fall 1:  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ Fall 2:  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

In unserem Fall  $a = 4$ ,  $b = 2$ , und  $f(n) = \Theta(n)$ . Also, Fall 1, da  $n = \mathcal{O}(n^{2-\epsilon}) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$ .

# Beispiel: Integermultiplikation

**Mastertheorem:** Rekurrenz:  $T[n] = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ .

- ▶ Fall 1:  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ Fall 2:  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

In unserem Fall  $a = 4$ ,  $b = 2$ , und  $f(n) = \Theta(n)$ . Also, Fall 1, da  $n = \mathcal{O}(n^{2-\epsilon}) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$ .

Wir erhalten Laufzeit  $\mathcal{O}(n^2)$ .

# Beispiel: Integermultiplikation

**Mastertheorem:** Rekurrenz:  $T[n] = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ .

- ▶ Fall 1:  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ Fall 2:  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

In unserem Fall  $a = 4$ ,  $b = 2$ , und  $f(n) = \Theta(n)$ . Also, Fall 1, da  $n = \mathcal{O}(n^{2-\epsilon}) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$ .

Wir erhalten Laufzeit  $\mathcal{O}(n^2)$ .

⇒ Nicht besser als „Schulmethode“.

## Beispiel: Integermultiplikation

We can use the following identity to compute  $Z_1$ :

## Beispiel: Integermultiplikation

We can use the following identity to compute  $Z_1$ :

$$Z_1 = A_1B_0 + A_0B_1$$

## Beispiel: Integermultiplikation

We can use the following identity to compute  $Z_1$ :

$$\begin{aligned}Z_1 &= A_1B_0 + A_0B_1 \\ &= (A_0 + A_1) \cdot (B_0 + B_1) - A_1B_1 - A_0B_0\end{aligned}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

We can use the following identity to compute  $Z_1$ :

$$\begin{aligned} Z_1 &= A_1B_0 + A_0B_1 && = Z_2 && = Z_0 \\ &= (A_0 + A_1) \cdot (B_0 + B_1) - \underbrace{A_1B_1}_{Z_2} - \underbrace{A_0B_0}_{Z_0} \end{aligned}$$

## Beispiel: Integermultiplikation

We can use the following identity to compute  $Z_1$ :

$$\begin{aligned} Z_1 &= A_1B_0 + A_0B_1 && = Z_2 && = Z_0 \\ &= (A_0 + A_1) \cdot (B_0 + B_1) - \underbrace{A_1B_1}_{Z_2} - \underbrace{A_0B_0}_{Z_0} \end{aligned}$$

```
1 Input: Zahlen A, B, repraesentiert durch Bitarrays
2       der Laenge n
3 Output: Bitarray, das A*B enthaelt
4
5 mult(A, B, n)
6     if (n == 1)
7         return new int(A[0]*B[0]);
8     split(A,A0,A1);
9     split(B,B0,B1);
10    Z2 = mult(A1,B1,n/2);
11    Z1 = mult(A0+A1,B0+B1,n/2)-Z0-Z2;
12    Z0 = mult(A0,B0,n/2);
13    return Z2*2^n + Z1*2^{n/2} + Z0;
```

## Beispiel: Integermultiplikation

Zeile 11 ist leider nicht korrekt, da  $A0 + A1$  bzw.  $B0 + B1$  eventuell  $n/2 + 1$  bits haben können. Wenn man eine  $n/2 + 1$ -bit Zahl  $X$  in das höchstwertige Bit  $X_{\frac{n}{2}}$  und die restlichen Bits  $\tilde{X}$  zerlegt kann man folgendes nutzen:

$$\begin{aligned} & \dots \\ X &= A0 + A1; \\ Y &= B0 + B1; \\ Z1 &= X_{\frac{n}{2}} * Y_{\frac{n}{2}} * 2^n + (X_{\frac{n}{2}} * \tilde{Y} + Y_{\frac{n}{2}} * \tilde{X}) * 2^{n/2} + \text{mult}(\tilde{X}, \tilde{Y}) - Z0 - Z2; \\ & \dots \end{aligned}$$

Laufzeit hierfür ist  $T(n/2) + \mathcal{O}(n)$ .

# Beispiel: Integermultiplikation

Wir erhalten folgende Rekurrenz:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) .$$

Master Theorem: Rekurrenz:  $T[n] = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ .

- ▶ Case 1:  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ Case 2:  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

Wir sind im Fall 1. Laufzeit  $\Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1.59})$ .

Eine deutliche Verbesserung der „Schulmethode“.

# Beispiel: Integermultiplikation

Wir erhalten folgende Rekurrenz:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) .$$

**Master Theorem:** Rekurrenz:  $T[n] = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ .

- ▶ Case 1:  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ Case 2:  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

Wir sind im Fall 1. Laufzeit  $\Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1.59})$ .

Eine deutliche Verbesserung der „Schulmethode“.

# Beispiel: Integermultiplikation

Wir erhalten folgende Rekurrenz:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) .$$

**Master Theorem:** Rekurrenz:  $T[n] = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ .

- ▶ Case 1:  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ Case 2:  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

Wir sind im Fall 1. Laufzeit  $\Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1.59})$ .

Eine deutliche Verbesserung der „Schulmethode“.

## Beispiel: Integermultiplikation

Wir erhalten folgende Rekurrenz:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) .$$

**Master Theorem:** Rekurrenz:  $T[n] = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ .

- ▶ Case 1:  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ▶ Case 2:  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$        $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

Wir sind im Fall 1. Laufzeit  $\Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1.59})$ .

Eine deutliche Verbesserung der „Schulmethode“.

# Algorithmenentwurf

Kein Patentrezept zum Entwurf von Algorithmen!

- ▶ insbesondere Ableitung von Algorithmus aus Spezifikation nicht automatisierbar

Programmieren ist **kreative** Tätigkeit

- ▶ “The Art of Computer Programming” (D. Knuth)

Unterstützung durch **Algorithmenmuster**

- ▶ auch **Design Patterns** genannt
- ▶ “best practice”

# Divide and Conquer

## Definition: Divide and Conquer

Divide and Conquer ist die **rekursive** Rückführung eines zu lösenden Problems auf mehrere **identische** Problem mit **kleinerer** Eingabemenge.

**Divide and Conquer:** zu deutsch “Teile und herrsche”

## Prinzip:

- ▶ teile große Aufgabe in mehrere kleine Teilaufgaben
- ▶ rufe denselben Algorithmus rekursiv auf den Teilaufgaben auf

# Divide and Conquer

1. **Teile** gegebene Aufgabe in mehrere getrennte Teilaufgaben
  - ▶ **löse** Teilaufgaben einzeln
  - ▶ **setze** Lösung der Gesamtaufgabe aus Teillösungen zusammen
2. Wende dieselbe Technik auf jede Teilaufgabe an, dann auf deren Teilaufgaben etc., bis die Teilaufgabe so klein ist, dass Lösung explizit berechnet werden kann
3. Jede Teilaufgabe sollte **von derselben Art** sein wie die Gesamtaufgabe, so dass der gleiche Algorithmus rekursiv aufgerufen werden kann

# Divide and Conquer

```
1 Input: Aufgabe A
2
3 DivideAndConquer(A)
4   if (A klein)
5     loese A explizit;
6   else
7     teile A in Teilaufgaben  $A_1, \dots, A_n$ ;
8     DivideAndConquer( $A_1$ )
9     ...
10    DivideAndConquer( $A_n$ )
11    berechne Loesung fuer A aus Lsgn fuer  $A_1, \dots, A_n$ 
```

# Divide and Conquer

- ▶ Berechnung der **Fibonacci**-Zahlen (untypisch, da Teilprobleme Größe  $n-1$  und  $n-2$  haben).
- ▶ Binäre Suche (nur ein Teilproblem der Größe  $\leq n/2$ ).
- ▶ Karatsuba für die Multiplikation großer Zahlen.
- ▶ **MergeSort**
- ▶ **QuickSort**
- ▶ **Fast Fourier Transformation (FFT)**
- ▶ **Medianberechnung**
- ▶ ...

# Mergesort – Sortieren durch Mischen

Mergesort ist ein schneller Sortieralgorithmus der nach dem Divide and Conquer Prinzip arbeitet



John von Neumann (1945)

# Divide and Conquer: MergeSort

Sei  $L$  verkettete Liste mit  $n$  natürlichen Zahlen  $a_i \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe:** sortiere  $L$  in aufsteigender Reihenfolge.

Lösung mit Divide and Conquer-Muster: **MergeSort**

Idee:

- ▶ **Divide:** teile  $L$  auf in zwei gleich große Teillisten
- ▶ **Rekursion:** rufe MergeSort rekursiv für die zwei Teillisten auf
- ▶ **Conquer:** setze die Teillisten zusammen (**merge** bzw. mischen)

Wann ist Teilliste “**klein**”, d.h. wann löst man explizit?

→ Teilliste mit nur **einem** Element → sortiert!

# Divide and Conquer: MergeSort

```
1 List* mergeSort(List* a) {
2     // returns a list with elements from a sorted
3     // may delete the list pointed to by a
4     if (a->length() <= 1) return a;
5     List* b = a->half();
6     a = mergeSort(a);
7     b = mergeSort(b);
8     return merge(a,b);
9 }
```

## Divide and Conquer: MergeSort

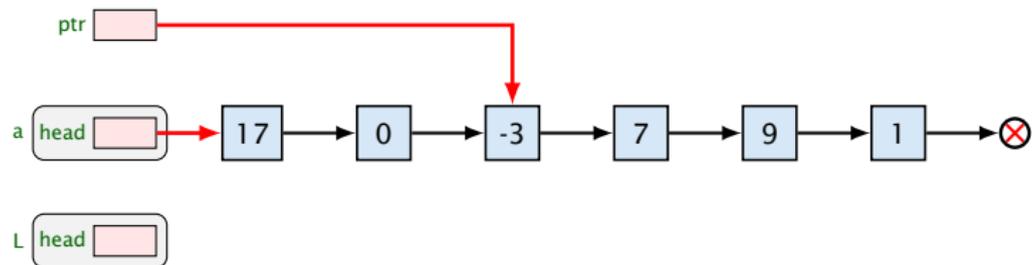
```
1 List* half() {
2     // removes elements from second half of list
3     // and returns these as a new list
4     Node* ptr = head;
5     for (int i=0; i<length()/2-1; i++)
6         ptr = ptr->next;
7     List* L = new List(ptr->next);
8     ptr->next = NULL;
9     return L;
10 }
```

# Beispiel – Halbieren

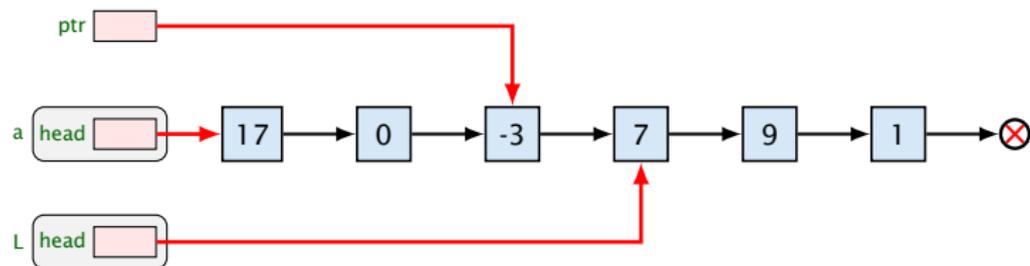


a.half()

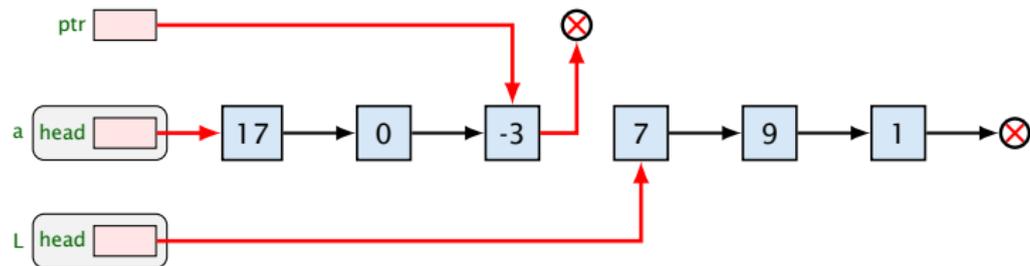
# Beispiel – Halbieren



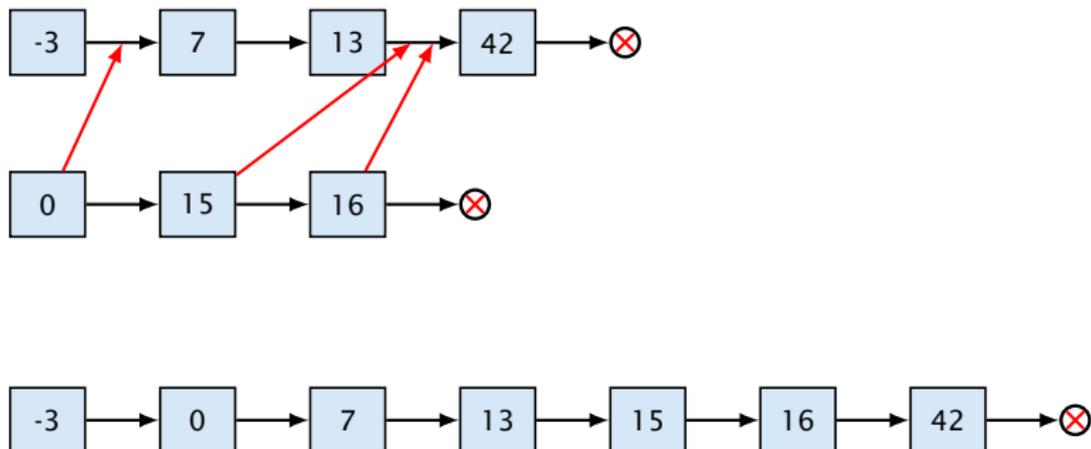
# Beispiel – Halbieren



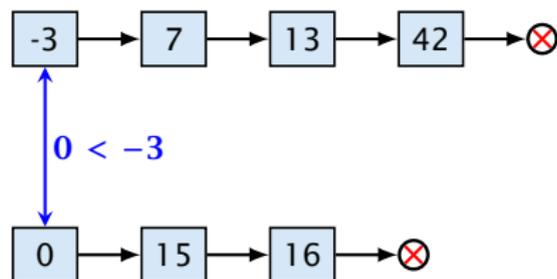
# Beispiel – Halbieren



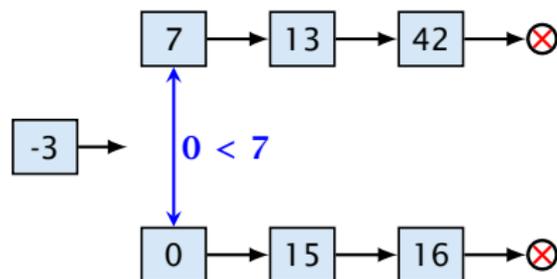
## Beispiel – Mischen



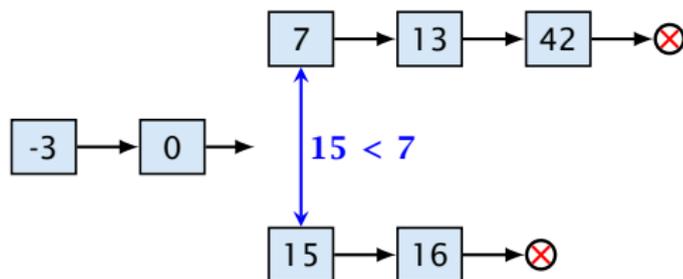
## Beispiel – Mischen



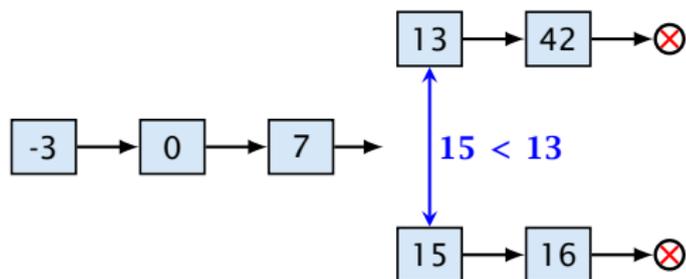
## Beispiel – Mischen



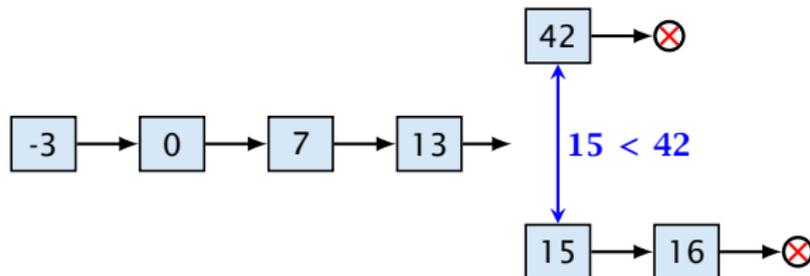
## Beispiel – Mischen



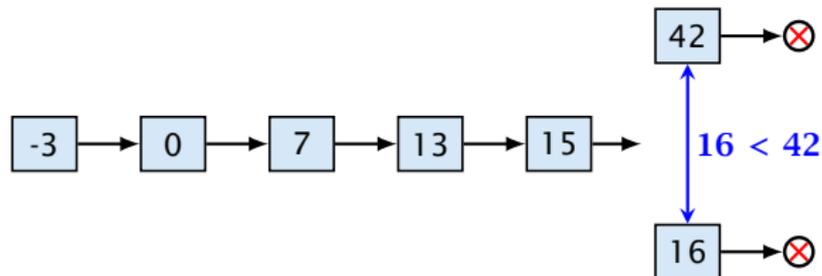
## Beispiel – Mischen



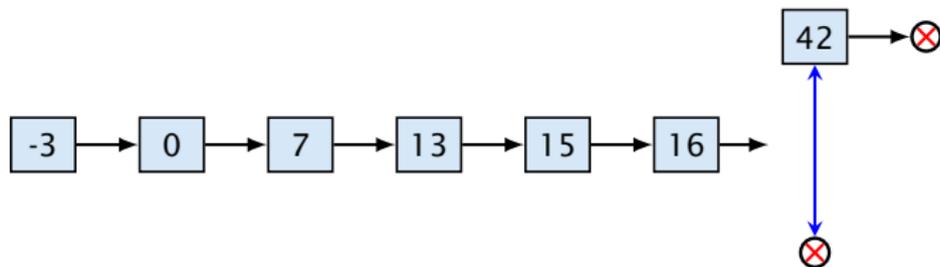
# Beispiel – Mischen



# Beispiel – Mischen



# Beispiel – Mischen



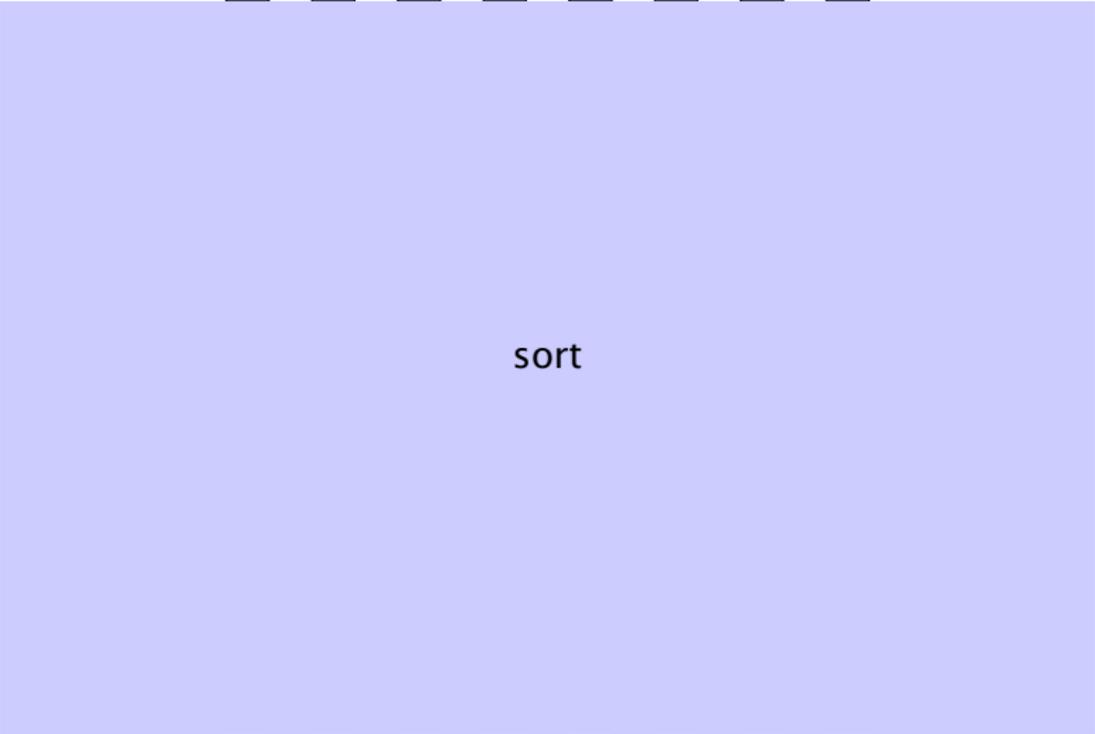
# Beispiel – Mischen



## Divide and Conquer: MergeSort

```
1 List* merge(List* a, List* b) {
2     // returns a list with elements from a and b
3     // the lists a and b may be deleted
4     if (a->empty()) { delete a; return b; }
5     if (b->empty()) { delete b; return a; }
6     List* h;
7     if (a->elementAt(0) < b->elementAt(0))
8         h = a;
9     else
10        h = b;
11    // remove element from h and recurse
12    int d = h->removeFront();
13    List* L = merge(a,b);
14    L->insertFront(d);
15    return L;
16 }
```

# Mergesort



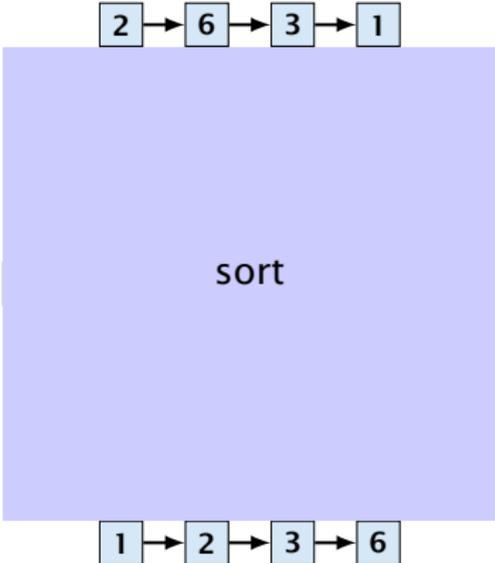
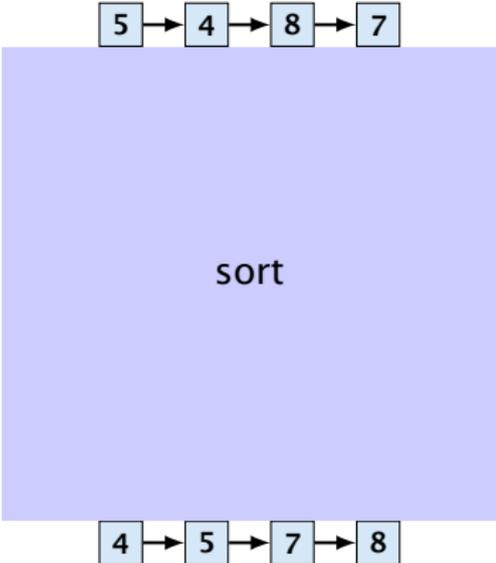
sort



# Mergesort



split



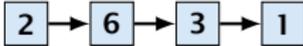
merge



# Mergesort



split



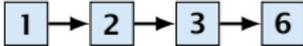
split

split



merge

merge



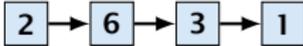
merge



# Mergesort



split



split

split



split

split

split

split



merge

merge

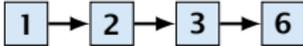
merge

merge



merge

merge



merge



## Eigenschaften

- ▶ Merge Sort benötigt zusätzlichen Speicher in Funktion `merge`; insgesamt  $n$  zusätzliche Elemente falls  $A$  Länge  $n$
- ▶ best und worst case sind identisch
- ▶ die meiste Arbeit steckt in `merge`; ein Aufruf von `merge` auf zwei Listen der Länge  $n/2$  Kosten Zeit  $\mathcal{O}(n)$ .

**Rekurrenzgleichung:**

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) .$$

**Laufzeit:**  $\mathcal{O}(n \log n)$

# Sortieralgorithmen Zusammenfassung

## Insertion Sort

- ▶ in-place
- ▶ Komplexität  $\mathcal{O}(n^2)$ , best case:  $\mathcal{O}(n)$
- ▶ Komplexität  $\mathcal{O}(hn)$  falls jedes Element nur  $h$  Positionen von Zielposition entfernt

## MergeSort

- ▶ benötigt zusätzlichen Speicher
- ▶ Komplexität  $\mathcal{O}(n \log n)$

## QuickSort

- ▶ in-place
- ▶ Komplexität im Mittel  $\mathcal{O}(n \log n)$ , worst case:  $\mathcal{O}(n^2)$

# Algorithmenmuster: Greedy

**greedy** = “gierig”, “gefräßig”

## Greedy Prinzip:

- ▶ Lösung eines Problems durch **schrittweise Erweiterung** der Lösung ausgehend von Startlösung
- ▶ in jedem Schritt wähle den **bestmöglichen Schritt** (ohne Berücksichtigung zukünftiger Schritte) ⇒ **greedy**

gefundene Lösung muss nicht immer optimal sein!

# Algorithmenmuster: Greedy

```
1 Input: Aufgabe A
2
3 Greedy(A)
4     S = {}; // Loesung
5     while (S keine Loesung)
6         waehle bestmoeglichen Erweiterungsschritt s
7         erweitere S mit s
```

# Greedy: Beispiel Wechselgeld I



**Problem:** Herausgabe von Wechselgeld

- ▶ **Voraussetzung:** übliche Euro-Münzen 2€, 1€, 50ct, 20ct, 10ct, 5ct, 2ct und 1ct
- ▶ **Aufgabe:** Wechselgeld-Herausgabe mit möglichst wenig Münzen

**Beispiel:** Preis €1.11, bezahlt mit 2€-Münze. Wechselgeld: 89ct

Minimum Anzahl Münzen: **6**

$$89\text{ct} = 50\text{ct} + 20\text{ct} + 10\text{ct} + 5\text{ct} + 2\text{ct} + 2\text{ct}$$

## Greedy: Beispiel Wechselgeld II

```
1 Input: Betrag b
2
3 Wechselgeld(b)
4     printf("%d = ",b);
5     count = 0;
6     while (count < b)
7         // make greedy choice
8         → wähle grösste Muenze s mit count + s <= b
9         printf("%d ",s);
10        count += s;
```

**Achtung:** Abhängig vom Geldsystem liefert dieser Algorithmus nicht immer optimale Lösung!

- ▶ **Beispiel:** Münzen: 5ct, 4ct, 1ct.    **Betrag:** 8ct
- ▶ **Greedy-Lösung:** 8ct = 5ct + 1ct + 1ct + 1ct
- ▶ **Optimale Lösung:** 8ct = 4ct + 4ct

# Von Greedy lösbare Probleme

**Voraussetzungen** für Anwendbarkeit von Greedy:

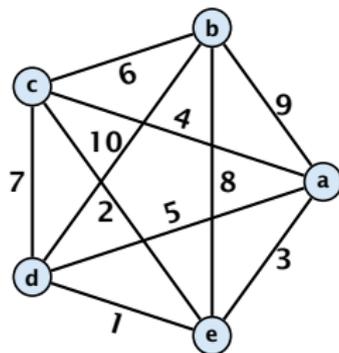
- ▶ Lösungen lassen sich schrittweise durch Hinzufügen von Elementen aufbauen, beginnend bei leerer Lösung
- ▶ Bewertungsfunktion für partielle und vollständige Lösung
- ▶ Gesucht wird eine/die optimale Lösung

# Anwendung Greedy: Glasfasernetz

**Problemstellung:** Aufbau von **möglichst billigem** Glasfasernetz zwischen  $n$  Knoten  $K_1, \dots, K_n$ , so dass alle Knoten miteinander verbunden sind (u.U. mit Umweg)

## Input:

- ▶ Knoten  $a, b, c, \dots$
- ▶ Kosten  $d_{ij} > 0$  für direkte Verbindung zwischen  $i$  und  $j$  für  $i \neq j$ .

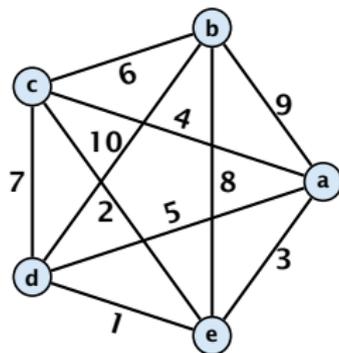


# Anwendung Greedy: Glasfasernetz

**Problemstellung:** Aufbau von **möglichst billigem** Glasfasernetz zwischen  $n$  Knoten  $K_1, \dots, K_n$ , so dass alle Knoten miteinander verbunden sind (u.U. mit Umweg)

## Input:

- ▶ Knoten  $a, b, c, \dots$
- ▶ Kosten  $d_{ij} > 0$  für direkte Verbindung zwischen  $i$  und  $j$  für  $i \neq j$ .

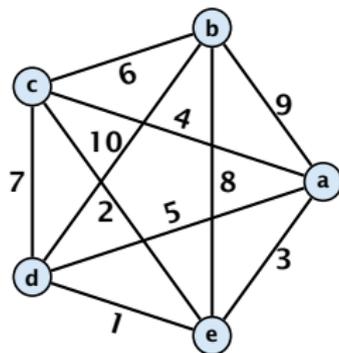


# Anwendung Greedy: Glasfasernetz

**Problemstellung:** Aufbau von **möglichst billigem** Glasfasernetz zwischen  $n$  Knoten  $K_1, \dots, K_n$ , so dass alle Knoten miteinander verbunden sind (u.U. mit Umweg)

## Input:

- ▶ Knoten  $a, b, c, \dots$
- ▶ Kosten  $d_{ij} > 0$  für direkte Verbindung zwischen  $i$  und  $j$  für  $i \neq j$ .

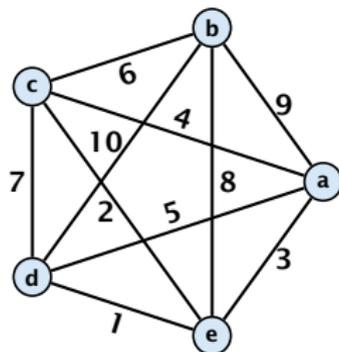


# Anwendung Greedy: Glasfasernetz

**Problemstellung:** Aufbau von **möglichst billigem** Glasfasernetz zwischen  $n$  Knoten  $K_1, \dots, K_n$ , so dass alle Knoten miteinander verbunden sind (u.U. mit Umweg)

## Input:

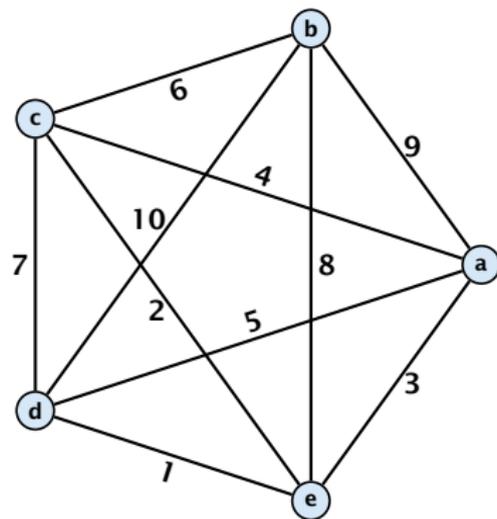
- ▶ Knoten  $a, b, c, \dots$
- ▶ Kosten  $d_{ij} > 0$  für direkte Verbindung zwischen  $i$  und  $j$  für  $i \neq j$ .



**Output:** Teilmenge aller Verbindungen, so dass

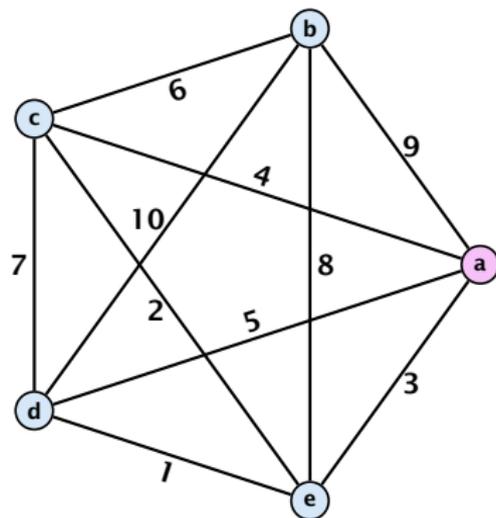
- ▶ alle Knoten verbunden sowie
- ▶ minimale Kosten

## Beispiel: Glasfasernetz



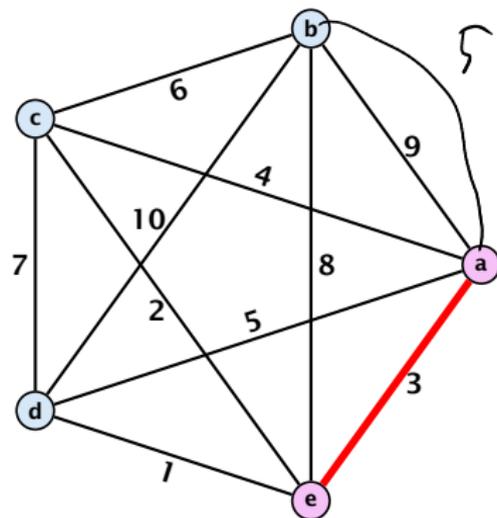
- ▶ Knoten  $a, b, c, d, e$
- ▶ Kosten  $d_{ij}$
- ▶ repräsentiert als gewichteter, ungerichteter Graph

## Beispiel: Glasfasernetz



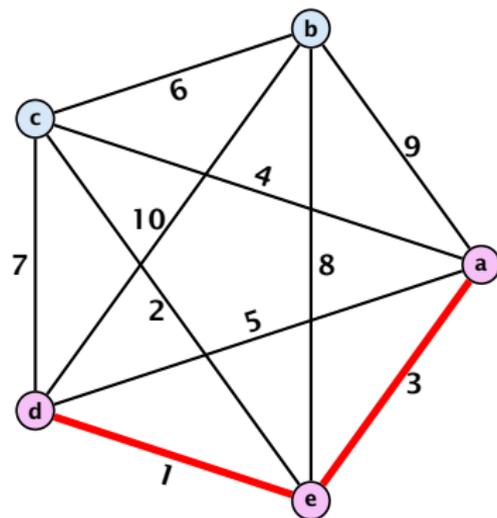
- ▶ Startknoten *a*
- ▶ beste Verbindung aus  $\{a\}$  führt zu *e* (Kosten 3)

## Beispiel: Glasfasernetz



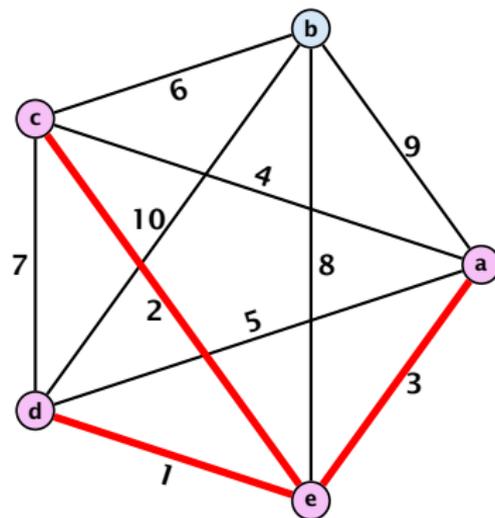
- ▶ Menge  $\{a, e\}$
- ▶ beste Verbindung aus  $\{a, e\}$  führt zu  $d$  (Kosten 1)

# Beispiel: Glasfasernetz



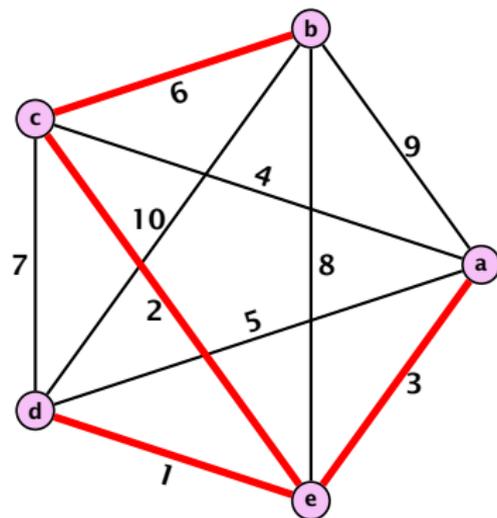
- ▶ Menge  $\{a, d, e\}$
- ▶ beste Verbindung aus  $\{a, d, e\}$  führt zu  $c$  (Kosten 2)

## Beispiel: Glasfasernetz



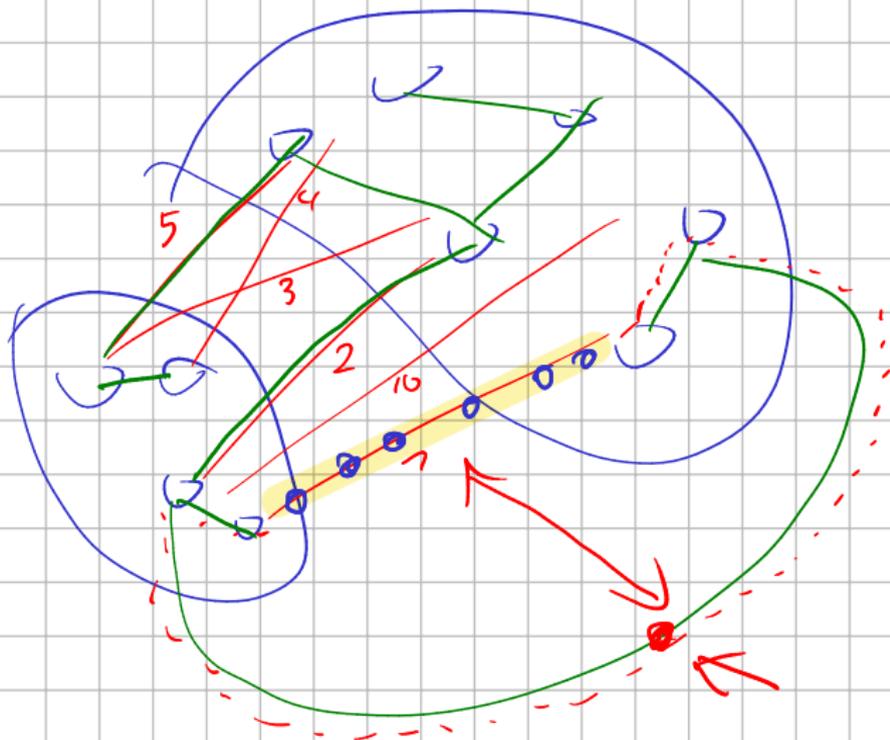
- ▶ Menge  $\{a, c, d, e\}$
- ▶ beste Verbindung aus  $\{a, c, d, e\}$  führt zu  $b$  (Kosten 6)

## Beispiel: Glasfasernetz



- ▶ alle Knoten verbunden
- ▶ Algorithmus fertig

**Ergebnis:** ein sog. **minimaler Spannbaum** (minimum spanning tree) des Graphen



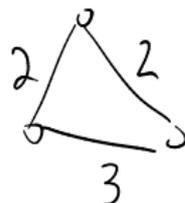
# Glasfasernetz: Algorithmus

$$\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$$

```
1 Input: Array K von n Knoten, Kostenfunktion d(i,j)
2 Output: minimaler Spannbaum B
3
4 Glasfasernetz(K, d)
5   B = K[1];
6   while (B nicht Spannbaum)
7     suche billigste Kante aus B; ←  $\Theta(m)$ 
8     fuege Kante und Knoten zu B hinzu;
```

Komplexität naiver Implementation:  $O(n^3)$

⇒ geht besser, (später in der Vorlesung)



# Algorithmenmuster: Brute Force

## Brute Force:

- ▶ erzeuge all in Frage kommenden Lösungskandidaten
- ▶ überprüfe für jeden Kandidaten ob es eine zulässige Lösung ist
- ▶ ggfs. (bei Optimierungsproblemen) bestimme zulässige Lösung mit minimalen Kosten/maximalem Profit

## Eigenschaften:

- ▶ sehr einfach zu implementieren
- ▶ häufig sehr schlechte Laufzeit

# Algorithmenmuster: Brute Force

```
1 Input: Problem P
2 Output: zulaessige Loesung fuer P
3
4 BruteForce(P)
5     S = first(P)
6     while (S != NULL)
7         if (S valid for P)
8             return S
9     S = next(P)
```

gibt mir nächsten Kandid.

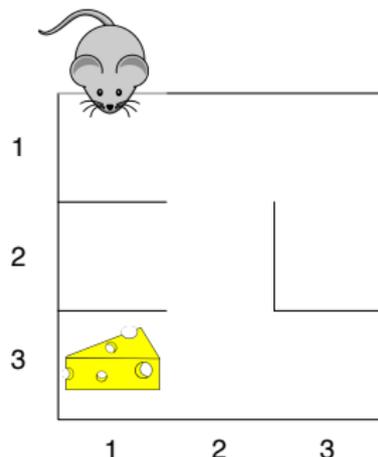
# Algorithmenmuster: Backtracking

**Backtracking:** systematische Suchtechnik, um vorgegebenen Lösungsraum vollständig abzuarbeiten

# Algorithmenmuster: Backtracking

**Backtracking:** systematische Suchtechnik, um vorgegebenen Lösungsraum vollständig abzuarbeiten

**Paradebeispiel:** Labyrinth. Wie findet Maus den Käse?

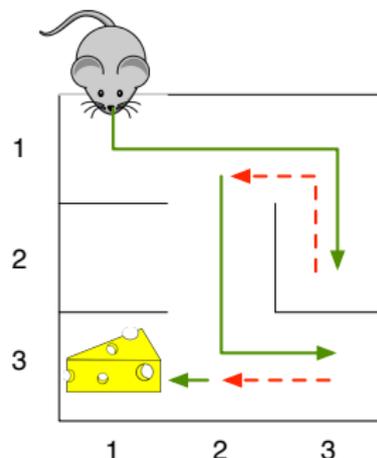


# Backtracking: Labyrinth I

**Problem:** Wie findet Maus den Käse?

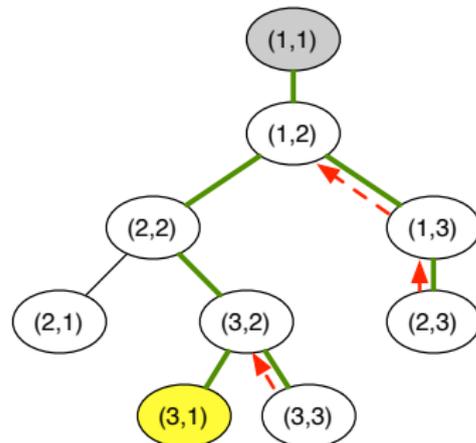
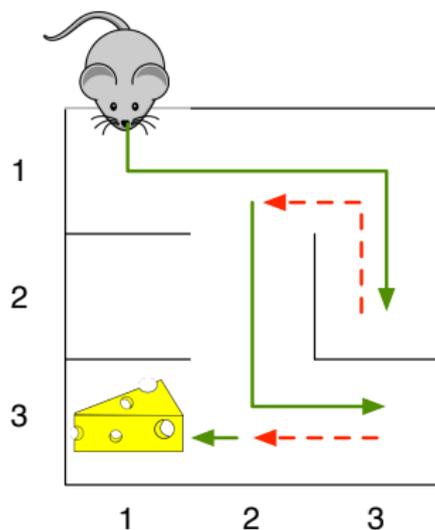
**Lösung:**

- ▶ systematisches Abgehen des Labyrinths
- ▶ Zurückgehen falls Sackgasse (daher: **Backtracking**)  
⇒ “trial and error”



# Backtracking: Labyrinth II

Mögliche Wege repräsentiert als **Baum**:



# Algorithmenmuster: Backtracking

## Voraussetzungen:

- ▶ Lösungs(tteil)raum repräsentiert als **Konfiguration**  $K$
- ▶  $K_0$  ist Startkonfiguration
- ▶ jede Konfiguration  $K_i$  kann **direkt erweitert** werden
- ▶ für jede Konfiguration ist entscheidbar, ob Lösung

```
1 Input: Konfiguration K
2
3 Backtrack(K)
4     if (K Loesung)
5         gib K aus;
6     else
7         foreach (Erweiterung K' von K)
8             Backtrack(K')
```

# Algorithmenmuster: Backtracking

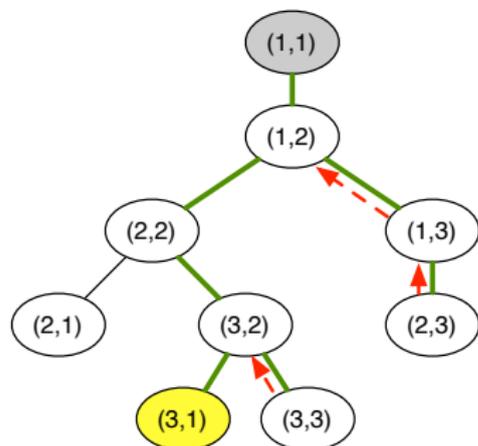
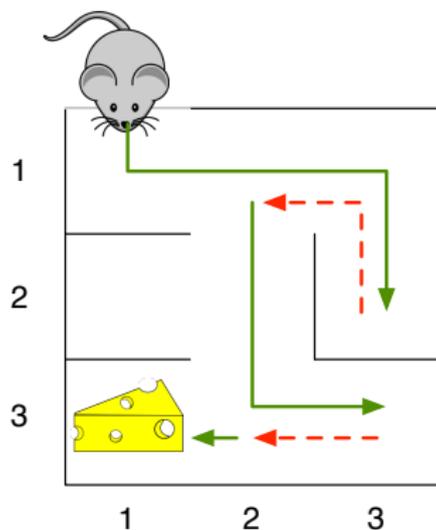
## Voraussetzungen:

- ▶ Lösungs(teil)raum repräsentiert als **Konfiguration  $K$**
- ▶  $K_0$  ist Startkonfiguration
- ▶ jede Konfiguration  $K_i$  kann **direkt erweitert** werden
- ▶ für jede Konfiguration ist entscheidbar, ob Lösung

```
1 Input: Konfiguration K
2
3 Backtrack(K)
4     if (K Loesung)
5         gib K aus;
6     else
7         foreach (Erweiterung  $K'$  von K)
8             Backtrack( $K'$ )
```

⇒ **initialer Aufruf** mittels  $\text{Backtrack}(K_0)$

# Backtracking: Konfigurationen



**Konfiguration** z.B. repräsentiert als **Pfad** im Baum

# Backtracking: Eigenschaften

**Terminierung** von Backtracking:

- ▶ nur wenn Lösungsraum **endlich**
- ▶ nur wenn sichergestellt dass Konfigurationen **nicht wiederholt getestet** werden

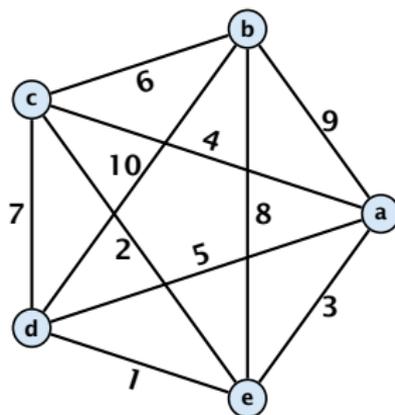
**Komplexität** von Backtracking:

- ▶ direkt abhängig von Größe des Lösungsraums
- ▶ meist **exponentiell**, also  $O(2^n)$ , oder schlimmer!
- ▶ nur für kleine Probleme wirklich anwendbar

# Backtracking Beispiel: Traveling Salesman

## Traveling Salesman Problem:

- ▶  $n$  Städte
- ▶ finde **kürzeste Rundreise**, die alle Städte exakt einmal besucht (ausser Start- und Zielort (identisch))



⇒ Lösung z.B. mit Algorithmenmuster Backtracking

# Traveling Salesman Problem: Algorithmus mit Backtracking

```
1 Input: n Staedte, Rundreise trip
2
3 TSP(trip)
4   if (trip besucht jede Stadt)
5       erweitere trip um Reise zum Startort;
6       gebe trip und Kosten aus;
7   else
8       foreach (bislang unbesuchte Stadt s)
9           trip' = trip erweitert um s
10          TSP(trip');
```

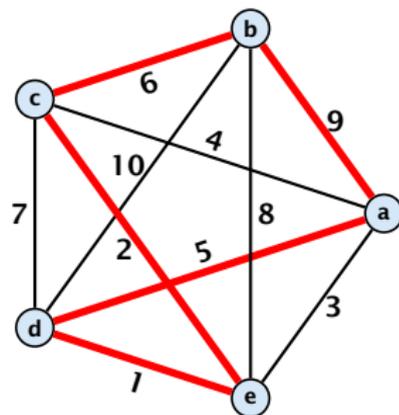
# Traveling Salesman Problem: Beispiel

Bei  $n$  Städten mit fixiertem Start-/Zielort gibt es  $(n - 1)!$  Rundreisen (hier: 5 Städte  $\Rightarrow 4! = 24$  Rundreisen).

Laufzeit von **TSP** hier ist  $\mathcal{O}((n - 1)!)$

hier: kürzeste Rundreise hat Länge 23

- ▶ z.B. über Route  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a$



# Backtracking Beispiel: Acht-Damen-Problem

## Acht-Damen-Problem:

- ▶ suche alle Konfigurationen von 8 Damen auf Schachbrett
- ▶ so dass keine Dame eine andere bedroht

# Backtracking Beispiel: Acht-Damen-Problem

## Acht-Damen-Problem:

- ▶ suche alle Konfigurationen von 8 Damen auf Schachbrett
- ▶ so dass keine Dame eine andere bedroht

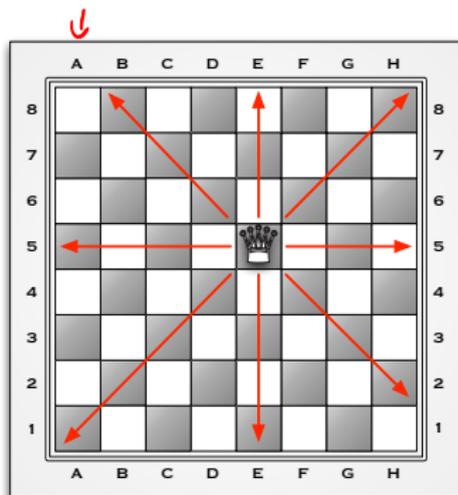
## Dame auf Schachbrett:

for a = 1 to 8  
for b = 1 to 8  
for c = 1 to 8

⋮

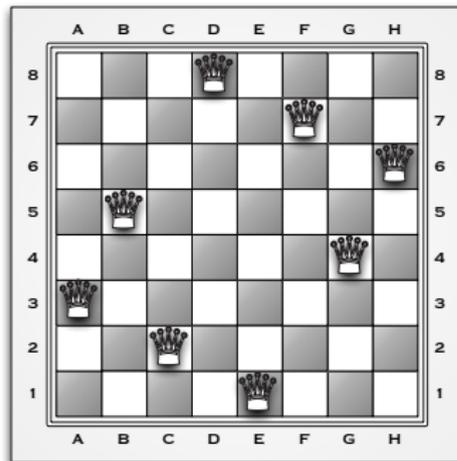
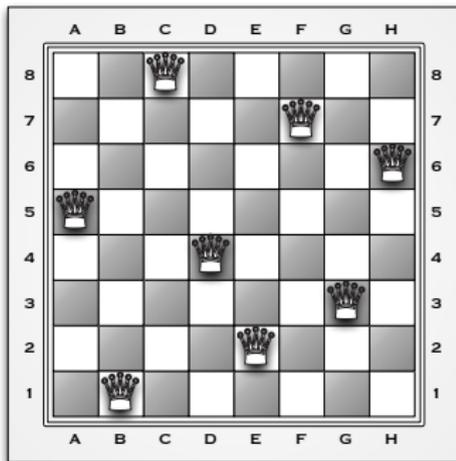
Dame an Position: A, a  
" " " B, b  
" " " C, c

überprüfe ob gültig



# Acht-Damen-Problem

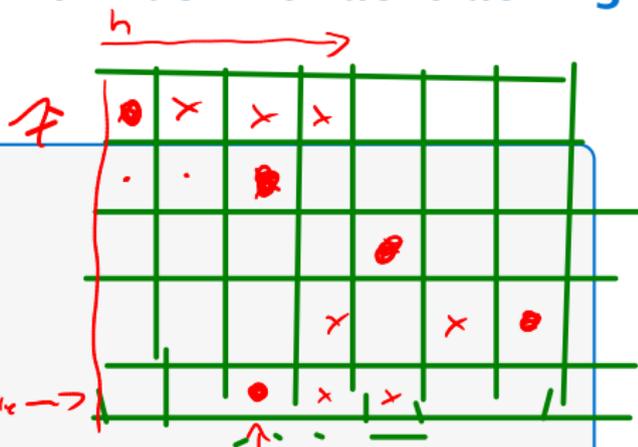
Zwei der möglichen Lösungen:



**Beobachtung:** jeweils nur eine Dame pro Zeile/Spalte  
→ Lösung z.B. mit Algorithmenmuster Backtracking

# Acht-Damen-Problem: Algorithmus mit Backtracking

```
1 Input: Zeilenindex i
2
3 AchtDamen(i)
4   if (i == 9)
5     → gib Lösung aus;
6     return;
7   for h=1 to 8
8     if (Feld in Zeile i, Spalte h nicht bedroht) ←
9       setze Dame auf Feld (i,h);
10      → AchtDamen(i+1);
11      → entferne Dame von Feld (i,h);
```



# Acht-Damen-Problem

- ▶ es gibt **92 Lösungen** für das Acht-Damen-Problem
- ▶ das Problem lässt sich auf  $n$  Damen auf einem  $n \times n$  Schachbrett ausweiten
  - ▶ Anzahl Lösungen wächst stark
  - ▶ z.B. für  $n = 13$  gibt es **73712** Lösungen
- ▶ ähnliche Spiele, wie z.B. **Sudoku**, lassen sich entsprechend lösen

## Dynamisches Programmieren

- ▶ einsetzbar für Probleme, deren optimale Lösung sich aus optimalen Lösungen von Teilproblemen zusammensetzt (z.B. Rekursion)

### Prinzip:

- ▶ statt Rekursion berechnet man vom kleinsten Teilproblem **“aufwärts”**
- ▶ Zwischenergebnisse werden in **Tabellen** gespeichert

# Beispiel: Fibonacci Zahlen

## Fibonacci Folge

Die **Fibonacci Folge** ist eine Folge natürlicher Zahlen  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , für die gilt

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3$$

mit Anfangswerten  $f_1 = 1, f_2 = 1$ .

- ▶ eingesetzt von Leonardo Fibonacci zur Beschreibung von Wachstum einer Kaninchenpopulation
- ▶ Folge lautet: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
- ▶ berechenbar z.B. via Rekursion



# Beispiel: Fibonacci Funktion

Input: Index  $n$  der Fibonaccifolge

Output: Wert  $f_n$

```
fib(n)
  if (n == 1 || n == 2) {
    return 1;
  }
  else {
    // rekursiver Aufruf
    return fib(n-1) + fib(n-2);
  }
```

# Beispiel: Fibonacci Funktion

$fib(n)$

$fib(i)$  für  $i \in 1, \dots, n$

$\phi^n$

$\Theta(2^{2^n})$

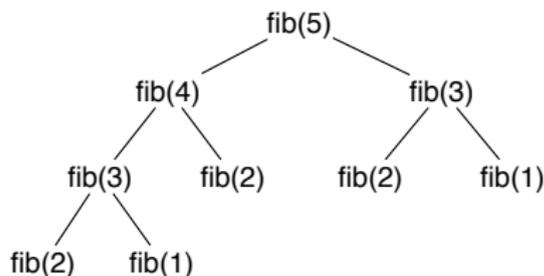
**Input:** Index  $n$  der Fibonaccifolge

**Output:** Wert  $f_n$

$fib(n)$

```
if (n == 1 || n == 2) {  
    return 1;  
}  
else {  
    // rekursiver Aufruf  
    return fib(n-1) + fib(n-2);  
}
```

Aufrufstruktur für  $fib(5)$ :



# Fibonacci Funktion: dynamisch programmiert

```
1 Input: Index n der Fibonaccifolge
2 Output:  $F_n$ 
3
4 FibDyn(n)
5     fib = new long[n+1]; 0, ..., n
6     fib[1] = 1;
7     fib[2] = 1;
8     for (k=3; k <= n; k++)
9         fib[k] = fib[k-1] + fib[k-2];
10    res = fib[n];
11    delete fib;
12    return fib[n]; res;
```

- Komplexität dynamisch programmiert:  $O(n)$

# Definition: Ungerichteter Graph

## Definition: Ungerichteter Graph

Ein **ungerichteter Graph** ist ein Paar  $G = (\underline{V}, \underline{E})$  mit

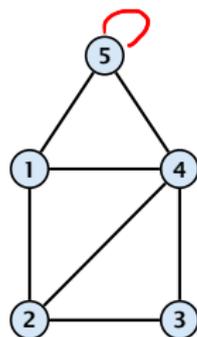
- ▶  $V$  endliche Menge der Knoten
- ▶  $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$  Menge der Kanten  
 $\{v, v\}$

auf Englisch:

- ▶ Knoten = **v**ertices
- ▶ Kanten = **e**dges

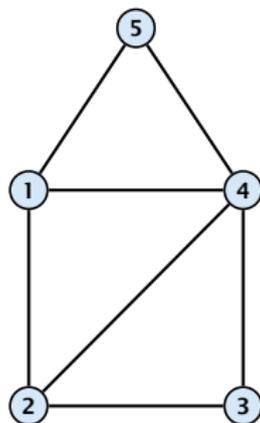
es ist  $\{u, v\} = \{v, u\}$ , d.h. Richtung der Kante spielt keine Rolle

**Beispiel:**



Manchmal erlaubt man auch **Schleifen** (**self-loops**); dann muss man  $E$  als Multimenge modellieren.

# Ungerichteter Graph: Beispiel



- ▶ Graph  $G_u = (V_u, E_u)$
- ▶ Knoten  $V_u = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ Kanten  $E_u = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

# Definition: Gerichteter Graph

## Definition: Gerichteter Graph

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar  $G = (V, E)$  mit

- ▶  $V$  endliche Menge der **Knoten**
- ▶  $E \subseteq V \times V$  Menge der **Kanten**

$$E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\} = V \times V$$

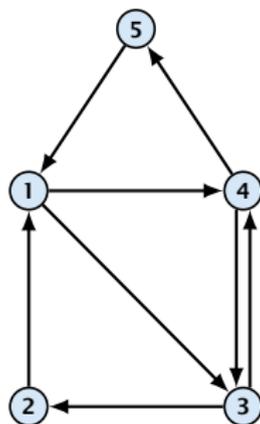
es ist  $(u, v) \neq (v, u)$ , d.h. Richtung der Kante spielt eine Rolle

hier sind Schleifen möglich, d.h. Kanten der Form  $(u, u)$  für  $u \in V$

Beispiel:

The diagram shows a directed graph with five nodes labeled 1 through 5. Node 1 is at the top left, node 2 is below it, node 3 is to the right of 2, node 4 is to the right of 1, and node 5 is at the top right. Directed edges are: 1 to 2, 1 to 3, 1 to 4, 2 to 1, 3 to 1, 3 to 4, 4 to 1, 4 to 3, 4 to 5, and 5 to 1. A red self-loop is drawn on node 1. A red arrow points from node 5 to node 1, with the handwritten label  $(5, 1)$  next to it.

# Gerichteter Graph: Beispiel



- ▶ Graph  $G_g = (V_g, E_g)$
- ▶ Knoten  $V_g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ Kanten  
 $E_g = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 1)\}$

# Definition: Gewichteter Graph

## Definition: Gewichteter Graph

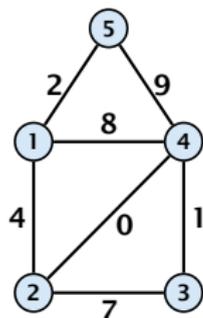
Ein **gewichteter Graph** ist ein Graph  $G = (V, E)$  mit einer Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

der Graph  $G$  kann gerichtet oder ungerichtet sein

**Beispiel:**

je nach Anwendung kann ein verschiedener Wertebereich für die Funktion  $w$  gewählt werden

- ▶ z.B.  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{N}_0$

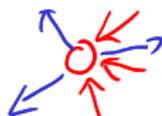


# Eigenschaften von Graphen I

$$u \longrightarrow v$$

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

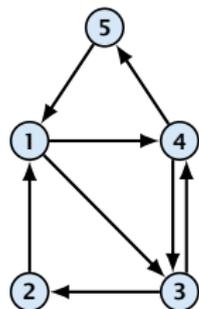
- ▶ Ist  $(u, v) \in E$  bzw.  $\{u, v\} \in E$  für  $u, v \in V$ , so heißt  $v$  adjazent zu  $u$ .
- ▶ Ein Knoten  $v$  und eine Kante  $e = (x, v)$  or  $e = \{x, v\}$  heißen inzident.  
*oder  $(v, x)$*
- ▶ Sei  $G$  **gerichteter Graph**:
  - ▶ die Anzahl der **eintretenden** Kanten in  $v$  heißt **Eingangsgrad** von  $v$ ,  $\text{indeg}(v) = |\{v' : (v', v) \in E\}|$
  - ▶ die Anzahl der **austretenden** Kanten heißt **Ausgangsgrad** von  $v$ ,  $\text{outdeg}(v) = |\{v' : (v, v') \in E\}|$
- ▶ Sei  $G$  **ungerichteter Graph**:
  - ▶ die Anzahl der eintretenden bzw. austretenden Kanten von  $v$  heißt **Grad** (englisch: degree) von  $v$  oder kurz  $\text{deg}(v)$ .



# Eigenschaften von Graphen: Beispiel

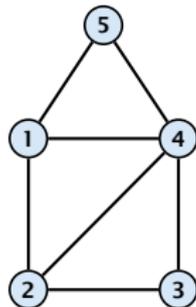
## Beispiel gerichteter Graph:

- ▶ Knoten 1 ist adjazent zu Knoten 2
- ▶ Knoten 2 ist adjazent zu Knoten 3
- ▶  $\text{outdeg}(4) = 2$ ,  $\text{indeg}(4) = 2$
- ▶  $\text{indeg}(2) = 1$ ,  $\text{outdeg}(2) = 1$



## Beispiel ungerichteter Graph:

- ▶ Knoten 4 ist adjazent zu Knoten 2
- ▶ Knoten 2 ist adjazent zu Knoten 4
- ▶  $\text{deg}(2) = 3$
- ▶  $\text{deg}(5) = 2$



# Eigenschaften von Graphen II



Sei  $G = (V, E)$  ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

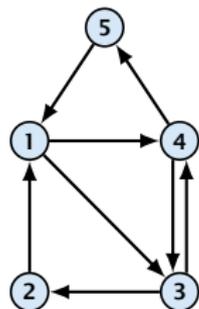
- ▶ Seien  $v, v' \in V$ . Ein **Pfad** von  $v$  nach  $v'$  ist eine Folge von Knoten  $(v_0, v_1, \dots, v_k) \subset V$  mit
  - ▶  $v_0 = v, v_k = v'$
  - ▶  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  bzw.  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  für  $i = 0, \dots, k-1$
- ▶  $k$  heißt **Länge** des Pfades.
- ▶ Ein Pfad heißt **einfach**, falls alle Knoten des Pfades paarweise verschieden sind.

Gibt es einen Pfad von  $u$  nach  $v$ , so heißt  $v$  **erreichbar** von  $u$ .

# Eigenschaften von Graphen II: Beispiel

## Beispiel gerichteter Graph:

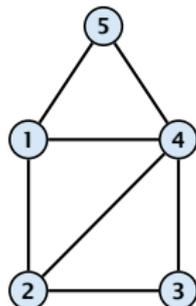
- ▶  $(2, 1, 3)$  ist ein einfacher Pfad der Länge 2
- ▶  $(1, 4, 5, 1)$  ist ein Pfad der Länge 3, aber nicht einfach
- ▶ 5 ist erreichbar von 1



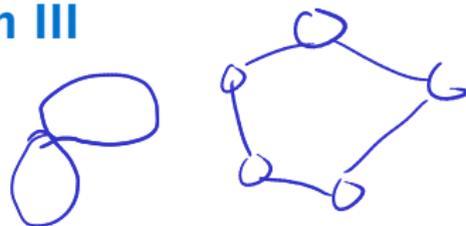
$(4, 5, 1, 4)$        $(1, 4, 5, 1)$

## Beispiel ungerichteter Graph:

- ▶  $(5, 2, 4, 3, 2)$  ist ein Pfad der Länge 4, aber nicht einfach
- ▶  $(1, 2, 3, 4)$  ist ein einfacher Pfad der Länge 3
- ▶ 3 ist erreichbar von 1



## Eigenschaften von Graphen III



Sei  $G = (V, E)$  Graph.

- ▶ Ein Pfad  $(v_0, \dots, v_k)$  heißt **Zyklus**, falls  $v_0 = v_k$ .
- ▶ Ein Zyklus  $(v_0, \dots, v_k)$  heißt **Kreis**, falls  $v_1, \dots, v_k$  paarweise verschieden sind.

$$v_1, \dots, v_k, v_1$$

Zyklen der Länge 1 oder 2 heißen **trivial** und werden häufig nicht betrachtet.

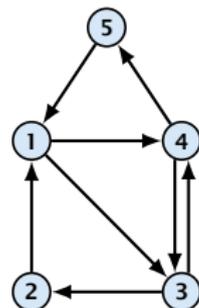
Ein Graph ohne Zyklen heißt **azyklisch**.



# Eigenschaften von Graphen III: Beispiel

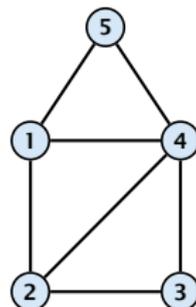
## Beispiel gerichteter Graph:

- ▶  $(2, 1, 3, 4, 3, 2)$  ist ein Zyklus, aber nicht einfach
- ▶  $(2, 1, 3, 1)$  ist ein einfacher Zyklus



## Beispiel ungerichteter Graph:

- ▶  $(2, 1, 3, 2)$  ist ein Zyklus
- ▶  $(1, 5, 4, 1)$  ist ein Zyklus



# Eigenschaften von Graphen IV

Sei  $G = (V, E)$  gerichteter Graph.

- ▶  $G$  heißt **stark zusammenhängend**, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- ▶ Eine **starke Zusammenhangskomponente** von  $G$  ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von  $G$ .
  - ▶ alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezüglich Relation “gegenseitig erreichbar”

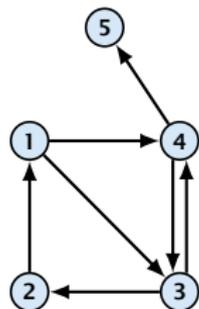
Sei  $G = (V, E)$  ungerichteter Graph.

- ▶  $G$  heißt **zusammenhängend**, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- ▶ Eine **Zusammenhangskomponente** von  $G$  ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von  $G$ .
  - ▶ alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezüglich Relation “erreichbar von”

# Eigenschaften von Graphen IV: Beispiel

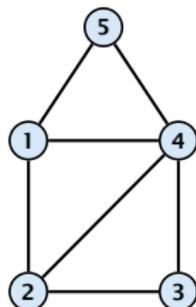
## Beispiel gerichteter Graph:

- ▶ Graph ist **nicht** stark zusammenhängend (z.B. 3 nicht erreichbar von 5)
- ▶ starke Zusammenhangskomponenten:  $\{1, 2, 3, 4\}$  und  $\{4\}$



## Beispiel ungerichteter Graph:

- ▶ Graph ist zusammenhängend
- ▶ nur eine Zusammenhangskomponente:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$



# Darstellung von Graphen: Adjazenzmatrizen

## Adjazenzmatrix

Sei  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Die Adjazenzmatrix von  $G$  speichert die vorhandenen Kanten in einer  $n \times n$  Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

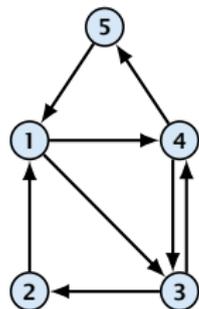
- ▶  $A(i, j) = 1$  falls Kante von Knoten  $v_i$  zu  $v_j$  existiert
- ▶  $A(i, j) = 0$  falls keine Kante von Knoten  $v_i$  zu  $v_j$  existiert

für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

# Eigenschaften von Graphen: Adjazenzmatrizen

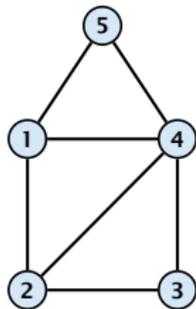
Beispiel gerichteter Graph:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Beispiel ungerichteter Graph:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



# Adjazenzmatrizen: Eigenschaften

Eigenschaften von Adjazenzmatrizen zu Graph  $G = (V, E)$

- ▶ sinnvoll wenn der Graph nahezu **vollständig** ist (d.h. fast alle möglichen Kanten tatsächlich in  $E$  liegen)
- ▶ Speicherkomplexität:  $O(|V|^2)$
- ▶ bei **ungerichteten** Graphen ist die Adjazenzmatrix **symmetrisch**
- ▶ bei **gewichteten** Graphen kann man statt der 1 in der Matrix das Gewicht der Kante eintragen

# Darstellung von Graphen: Adjazenzlisten

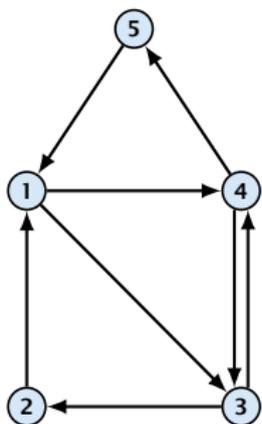
## Adjazenzliste

Sei  $G = (V, E)$  gerichteter Graph. Eine Adjazenzliste von  $G$  sind  $|V| + 1$  verkettete Listen, so daß

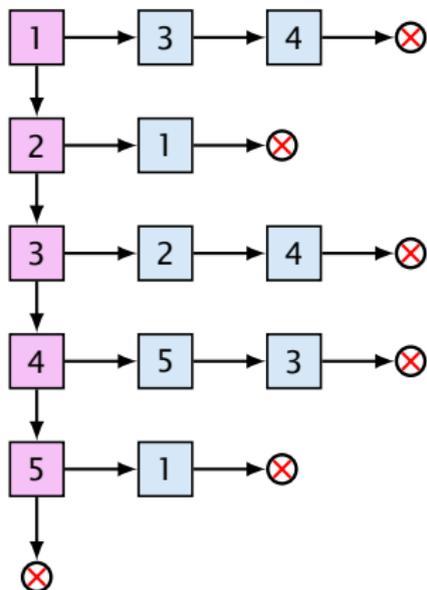
- ▶ die erste Liste alle Knoten enthält
- ▶ für jeden Knoten  $v$  eine Liste angelegt wird mit allen Knoten, die durch eine von  $v$  austretende Kante zu erreichen sind

# Adjazenzliste: Beispiel

Graph



Adjazenzliste



# Adjazenzliste: Eigenschaften

Eigenschaften von **Adjazenzlisten** zu Graph  $G = (V, E)$

- ▶ sinnvoll bei dünn besetzten Graphen mit wenigen Kanten
- ▶ Speicherkomplexität:  $O(|V| + |E|)$
- ▶ bei **ungerichteten** Graphen gleiches Verfahren
  - ▶ allerdings muß jede Kante zweimal gespeichert werden
- ▶ bei **gewichteten** Graphen kann man die Gewichte mit in den verketteten Listen der jeweiligen Knoten speichern

# Komplexität der Darstellungen

Sei  $G = (V, E)$  Graph.

Operation	Adjazenzmatrix	Adjazenzliste
Kante einfügen	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}( V )$
Kante löschen	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}( V )$
Knoten einfügen	$\mathcal{O}( V ^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Knoten löschen	$\mathcal{O}( V ^2)$	$\mathcal{O}( V  + \deg(v))$

- ▶ falls Größe im Vorhinein bekannt, kann Knoten löschen/einfügen bei Adjazenzmatrix effizienter implementiert werden
- ▶ Löschen von Knoten ist immer aufwendig, da auch alle Kanten von/zu diesem Knoten gelöscht werden müssen

## Ausblick auf Algorithmen auf Graphen:

- ▶ Traversierung (Durchlaufen) von allen Knoten
  - ▶ Depth-First Search (DFS)
  - ▶ Breadth-First Search (BFS)
- ▶ kürzester Pfad zwischen Knoten in Graphen
- ▶ minimaler Spannbaum (minimum spanning tree, MST)

# Bäume

**Bäume** sind alltägliches Mittel zur Strukturierung:

- ▶ Stammbaum
- ▶ Hierarchie in Unternehmen
- ▶ Systematik in der Biologie
- ▶ etc.



In **Informatik**:

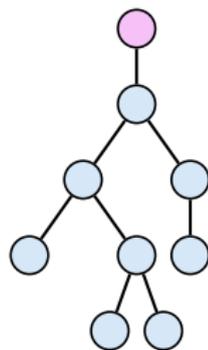
- ▶ Bäume sind spezielle Graphen
- ▶ Wurzel oben!



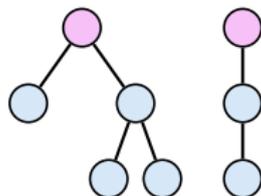
# Definition Wald/Baum

## Definition: Wald und Baum

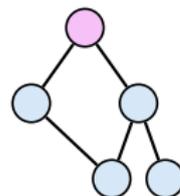
- ▶ Ein azyklischer ungerichteter Graph heißt auch **Wald**.
- ▶ Ein zusammenhängender, azyklischer ungerichteter Graph heißt auch **Baum**.



Baum



Wald



kein Baum

# Eigenschaften von Bäumen

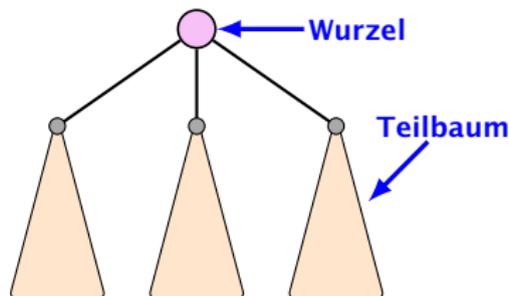
Sei  $G = (V, E)$  ein Baum.

- ▶ jedes Paar von Knoten  $u, v \in V$  ist durch einen **einzigsten Pfad** verbunden
- ▶  $G$  ist **zusammenhängend**, aber wenn eine Kante aus  $E$  **entfernt** wird, ist  $G$  nicht mehr zusammenhängend
- ▶  $G$  ist **azyklisch**, aber wenn eine Kante zu  $E$  **hinzugefügt** wird, ist  $G$  nicht mehr azyklisch
- ▶ es gilt  $|E| = |V| - 1$

# Wurzel von Bäumen

Sei  $G = (V, E)$  ein Baum.

- ▶ genau ein Knoten  $w \in V$  wird als **Wurzel** ausgezeichnet
- ▶ entfernt man  $w$  erhält man einen Wald von **Teilbäumen**

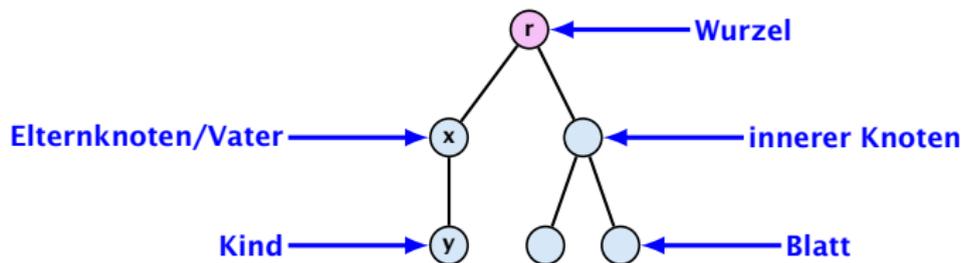


**Hinweis:** manchmal wird zwischen “freiem” und “gewurzeltem” Baum unterschieden!

# Weitere Begriffe bei Bäumen I

Sei  $G = (V, E)$  ein Baum mit Wurzel  $w \in V$ .

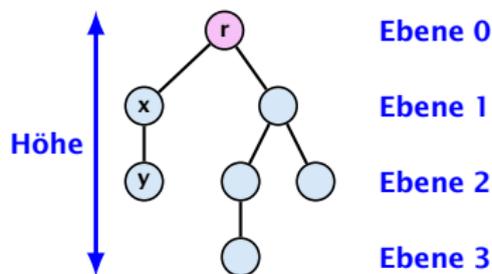
- ▶ jeder Knoten  $v \in V$  mit  $v \neq w$  ist mit genau einer Kante mit seinem **Elternknoten**  $x \in V$  (oder: direkter Vorgänger) verbunden
- ▶  $v$  wird dann als **Kind** (oder: direkter Nachfolger) von  $x \in V$  bezeichnet
- ▶ ein Knoten ohne Kinder heißt **Blatt**, alle anderen Knoten heißen **innere Knoten**



## Weitere Begriffe bei Bäumen II

Sei  $G = (V, E)$  ein Baum mit Wurzel  $w \in V$ .

- ▶ Anzahl der Kinder von Knoten  $x \in V$  heißt auch **Grad** von  $x$ .  
(**Achtung**: Grad in Graph  $G$  ist anders definiert!)
- ▶ Länge des Pfades von Wurzel  $w$  zu Knoten  $x \in V$  heißt **Tiefe** von  $x$
- ▶ alle Knoten gleicher Tiefe bilden eine **Ebene** des Baumes  $G$
- ▶ maximale Tiefe eines Knotens heißt **Höhe** des Baumes.  
(manchmal ist Höhe auch als Anzahl der Ebenen definiert)

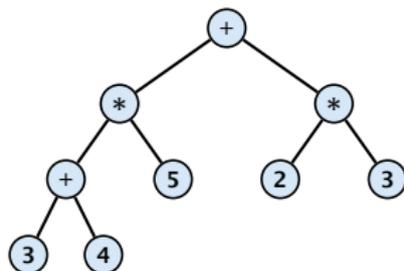


# Bäume: Beispiele

## arithmetischer Ausdruck

$$(3 + 4) * 5 + 2 * 3$$

repräsentiert als Baum:



## hierarchisches Dateisystem

- ▶ Windows z.B. "C:\\"
- ▶ Unix "/"

**Suchbaum** → später in der Vorlesung

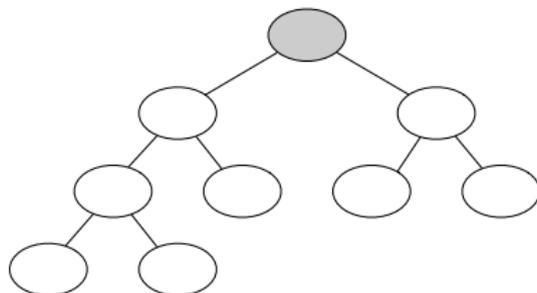
## Besondere Bäume

Sei  $G = (V, E)$  ein Baum mit Wurzel  $w \in V$ .

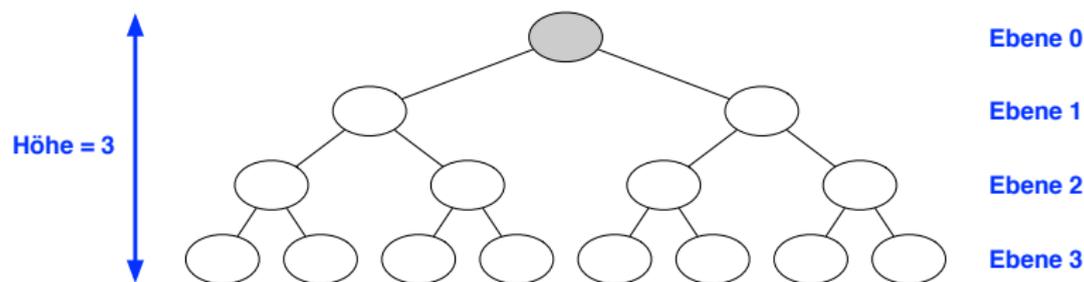
- ▶ sind die Kinder jedes Knotens in bestimmter Reihenfolge angeordnet, heißt  $G$  **geordneter Baum**
- ▶ ist die Anzahl  $n$  der Kinder jedes Knotens vorgegeben, heißt  $G$   **$n$ -ärer Baum**

Wichtiger Spezialfall:

- ▶ ist  $G$  geordnet und hat jeder Knoten maximal zwei Kinder, heißt  $G$  **Binärbaum**



# Beispiel: Binärbaum



Binärbaum mit Höhe 3, 8 Blättern und 7 inneren Knoten.

- ▶ Binärbaum heißt **vollständig**, wenn jede Ebene die maximale Anzahl an Knoten enthält
- ▶ ein vollständiger Binärbaum der Höhe  $k$  hat  $2^{k+1} - 1$  Knoten, davon  $2^k$  Blätter
- ▶ Beweis per Induktion

# Darstellung von Bäumen: als Graph

Bäume sind Graphen → Darstellung als

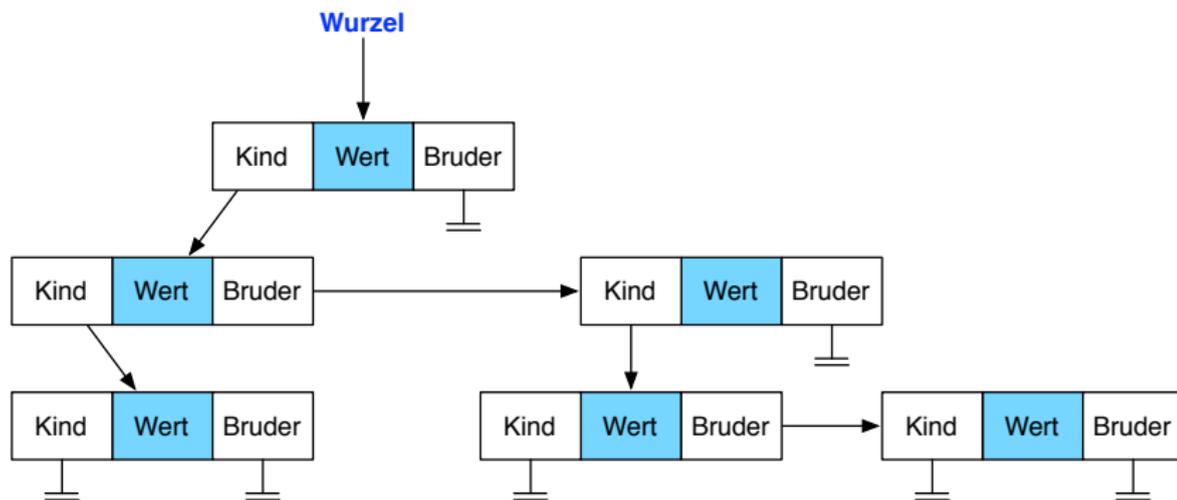
- ▶ Adjazenzmatrix
- ▶ Adjazenzliste

→ leider meist **nicht effizient** (sowohl Laufzeit als auch Speicher)



# Darstellung von Bäumen: verkettete Liste

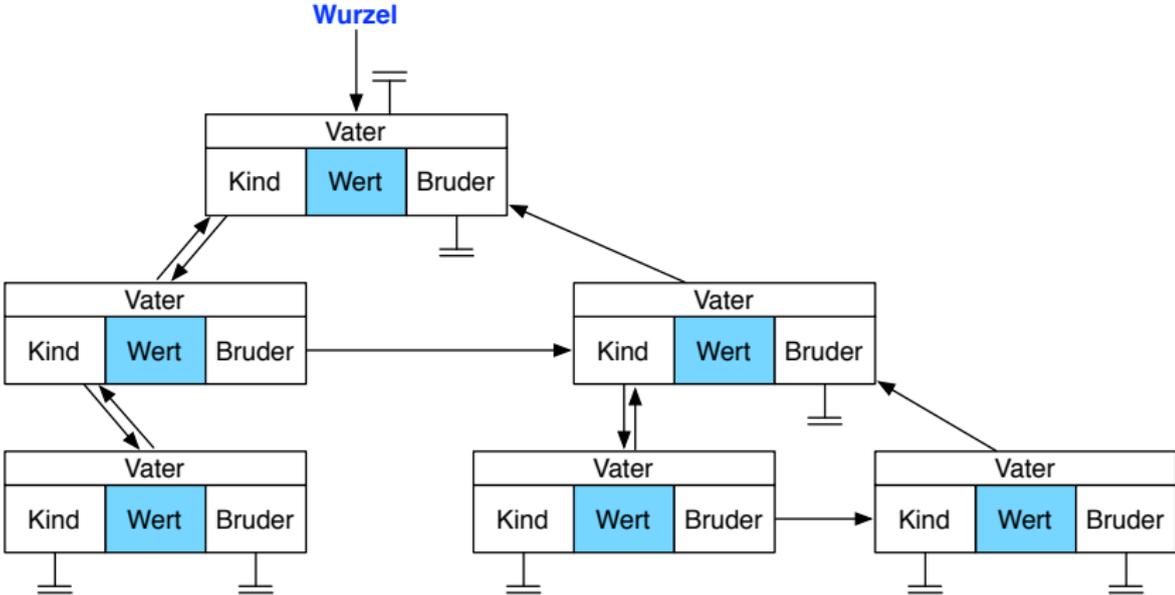
Darstellung mit angepassten verketteten Listen:



**Nachteil:** nur Navigation “nach unten” möglich

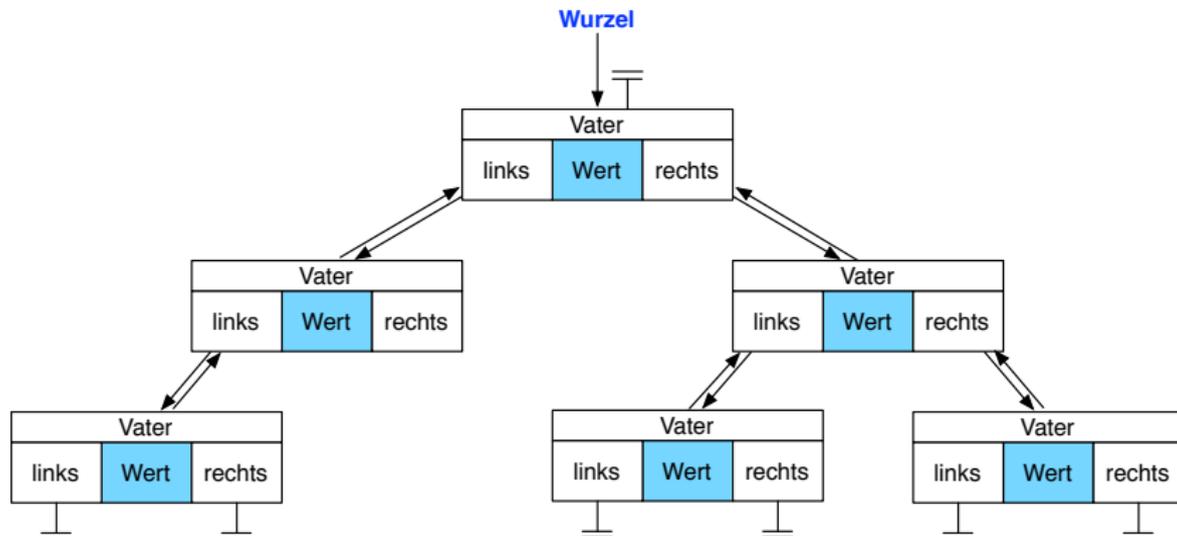
# Darstellung von Bäumen: doppelt verkettete Liste

Darstellung mit angepassten doppelt verketteten Listen:



# Darstellung von Binärbäumen

Darstellung direkt mit linkem/rechtem Kind (doppelt verkettet):

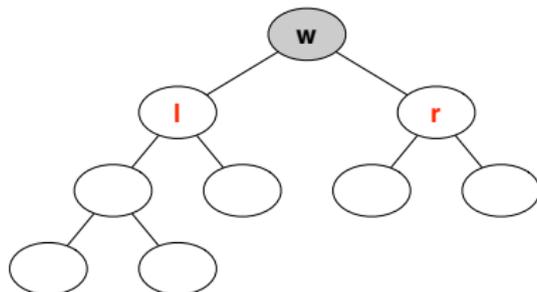


# Traversierung von Binärbäumen

Sei  $G = (V, E)$  Binärbaum.

In **welcher Reihenfolge** durchläuft man  $G$ ?

- ▶ **Wurzel** zuerst
- ▶ danach linker oder rechter Kind-Knoten  $l$  bzw.  $r$ ?
- ▶ falls  $l$ : danach Kind-Knoten von  $l$  oder zuerst  $r$ ?
- ▶ falls  $r$ : danach Kind-Knoten von  $r$  oder zuerst  $l$ ?



- falls zuerst in die Tiefe: **Depth-first search** (DFS)
- falls zuerst in die Breite: **Breadth-first search** (BFS)

# DFS Binärbaum

Sei  $G = (V, E)$  Binärbaum.

**Tiefensuche** (Depth-first search, DFS) gibt es in 3 Varianten:

## 1. Pre-order Reihenfolge

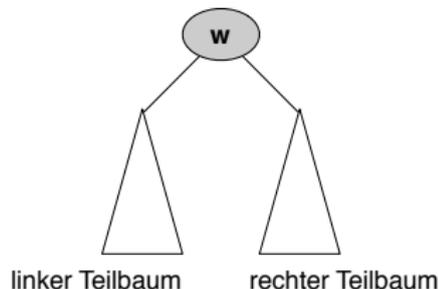
- ▶ besuche Wurzel
- ▶ durchlaufe linken Teilbaum
- ▶ durchlaufe rechten Teilbaum

## 2. In-order Reihenfolge

- ▶ durchlaufe linken Teilbaum
- ▶ besuche Wurzel
- ▶ durchlaufe rechten Teilbaum

## 3. Post-order Reihenfolge

- ▶ durchlaufe linken Teilbaum
- ▶ durchlaufe rechten Teilbaum
- ▶ besuche Wurzel



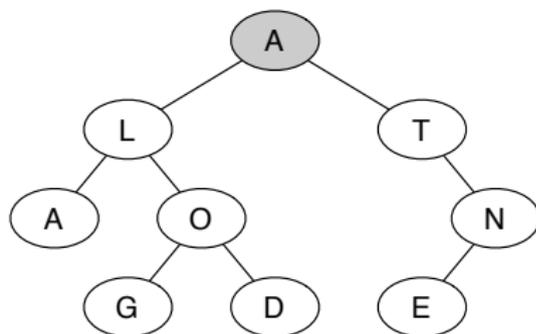
# Pre-order Traversierung

**Pre-order** Reihenfolge:

- ▶ besuche Wurzel
- ▶ durchlaufe linken Teilbaum
- ▶ durchlaufe rechten Teilbaum

**Beispiel:**

A, L, A, O, G, D, T, N, E



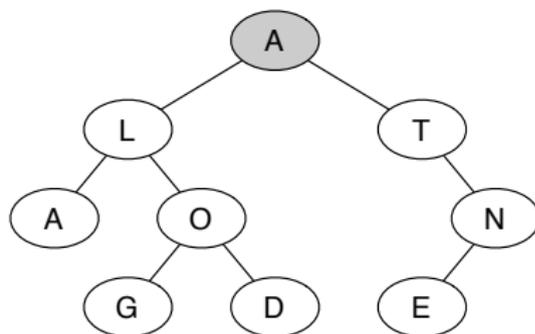
# In-order Traversierung

**In-order** Reihenfolge:

- ▶ durchlaufe linken Teilbaum
- ▶ besuche Wurzel
- ▶ durchlaufe rechten Teilbaum

**Beispiel:**

A, L, G, O, D, A, T, E, N



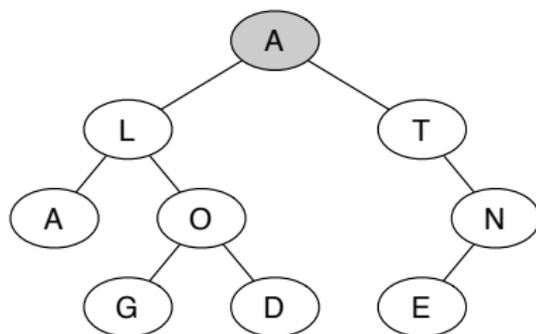
# Post-order Traversierung

**Post-order** Reihenfolge:

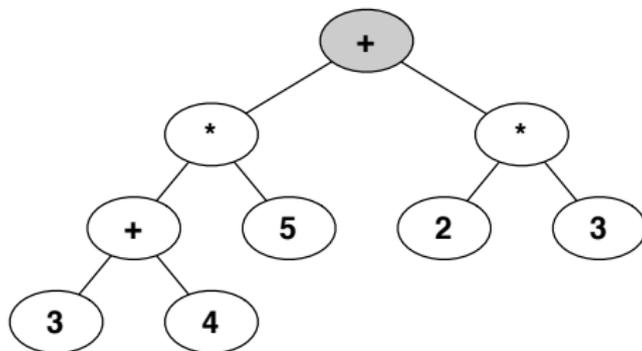
- ▶ durchlaufe linken Teilbaum
- ▶ durchlaufe rechten Teilbaum
- ▶ besuche Wurzel

**Beispiel:**

A, G, D, O, L, E, N, T, A



## Beispiel: Arithmetischer Term



Traversierung:

- ▶ **Pre-order:** + \* + 3 4 5 \* 2 3
- ▶ **In-order:** 3 + 4 \* 5 + 2 \* 3
- ▶ **Post-order:** 3 4 + 5 \* 2 3 \* +

# Implementierung DFS Traversierung

## Datenstruktur:

Knoten:



▶ Algorithmus **preorder**:

**preorder**(knoten):

```
if (knoten == null) return;  
print(knoten);  
preorder(knoten.links);  
preorder(knoten.rechts);
```

▶ Algorithmus **inorder**:

**inorder**(knoten):

```
if (knoten == null) return;  
inorder(knoten.links);  
print(knoten);  
inorder(knoten.rechts);
```

▶ Algorithmus **postorder**:

**postorder**(knoten):

```
if (knoten == null) return;  
postorder(knoten.links);  
postorder(knoten.rechts);  
print(knoten);
```

▶ **rekursive Algorithmen**

▶ auf Call-Stack basiert

# Implementierung DFS Traversierung ohne Rekursion

## ► Datenstruktur:

Knoten:

links	Wert	rechts	besucht
-------	------	--------	---------

## ► Hilfsmittel: Stack von Knoten "knotenStack"

**postorderIterativ**(wurzelKnoten):

```
knotenStack.push(wurzelKnoten);  
while ( !knotenStack.isEmpty() ) {  
    knoten = knotenStack.top();  
    if ( (knoten.links != null) && (!knoten.links.besucht) )  
        knotenStack.push(knoten.links);  
    else if ( (knoten.rechts != null) && (!knoten.rechts.besucht) )  
        knotenStack.push(knoten.rechts);  
    else {  
        print(knoten);  
        knoten.besucht = true;  
        knotenStack.pop();  
    }  
}
```

# Implementierung ohne Rekursion und ohne Stack

## ► Datenstruktur:



**postorderIterativeOhneStack**(wurzelKnoten):

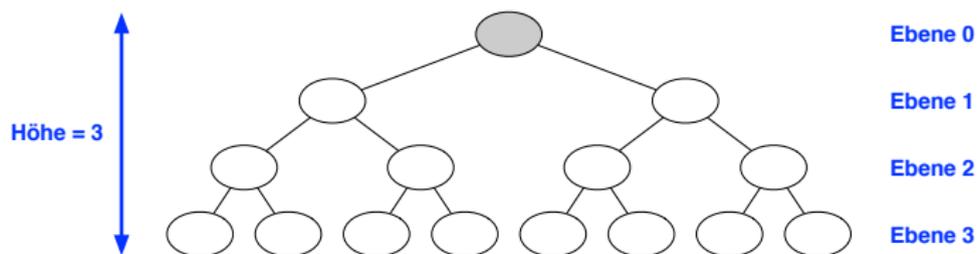
```
knoten = wurzelKnoten;
while (true) {
    if ( (knoten.links != null) && (!knoten.links.besucht) )
        knoten = knoten.links;
    else if ( (knoten.rechts != null) && (!knoten.rechts.besucht) )
        knoten = knoten.rechts;
    else {
        print(knoten);
        knoten.besucht = true;
        if (knoten.vater == null) break;
        else knoten = knoten.vater;
    }
}
```

# BFS Binärbaum

Sei  $G = (V, E)$  Binärbaum.

**Breitensuche** (Breadth-first search, BFS):

- ▶ besuche Wurzel
- ▶ für alle Ebenen von 1 bis Höhe
  - ▶ besuche alle Knoten aktueller Ebene



# Implementierung BFS Traversierung

- ▶ **Datenstruktur:**



- ▶ **Hilfsmittel:** Queue von Knoten "knotenQueue"

**breitensuche**(wurzelKnoten):

```
knotenQueue = leer;
```

```
knotenQueue.enqueue(wurzelKnoten);
```

```
while ( !knotenQueue.isEmpty() ) {
```

```
    knoten = knotenQueue.dequeue();
```

```
    besuche(knoten);
```

```
    if (knoten.links != null)
```

```
        knotenQueue.enqueue(knoten.links);
```

```
    if (knoten.rechts != null)
```

```
        knotenQueue.enqueue(knoten.rechts);
```

```
}
```