Kapitel IV Stochastische Prozesse

1. Einführung

Wir betrachten zeitliche Folgen von Zufallsexperimenten. Mathematisch beschreibt man diese durch einen so genannten stochastischen Prozess. Darunter versteht man eine Folge von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in T}$, die das Verhalten des Systems zu verschiedenen Zeitpunkten t angeben.

Wenn wir $T = \mathbb{N}_0$ annehmen, sprechen wir von einem stochastischen Prozess mit diskreter Zeit. Lässt man andererseits $T = \mathbb{R}_0^+$ zu, so spricht man von stochastischen Prozessen mit kontinuierlicher Zeit.

Eine besonders einfache Art von stochastischen Prozessen sind so genannte Markov-Ketten. Diese haben die Eigenschaft, dass der nächste Zustand des Prozesses zwar vom aktuellen Zustand abhängen darf, nicht aber von der Historie, d.h. davon, wie der aktuelle Zustand erreicht wurde.

2. Prozesse mit diskreter Zeit

2.1 Einführung

Definition 123

Eine (endliche) Markov-Kette (mit diskreter Zeit) über der Zustandsmenge $S = \{0, \ldots, n-1\}$ besteht aus einer unendlichen Folge von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit Wertemenge S sowie einer Startverteilung q_0 mit $q_0^T \in \mathbb{R}^n$. Die Komponenten von q_0 sind hierbei ≥ 0 und addieren sich zu 1. Für jede Indexmenge $I \subseteq \{0, \ldots, t-1\}$ und beliebige Zustände i, j, s_k $(k \in I)$ gilt

$$\begin{aligned} \Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i, \ \forall k \in I: \ X_k = s_k] = \\ \Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i]\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Sind die Werte

$$p_{ij} := \Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i]$$

von t unabhängig, so nennt man die Markov-Kette (zeit)homogen. In diesem Fall definiert man die Übergangsmatrix durch $P = (p_{ij})_{0 \leq i,j < n}$. Wenn man $S = \mathbb{N}_0$ zulässt, so spricht man von einer unendlichen Markov-Kette.

Markov-Ketten sind nach Andrey Andreyevich Markov (1856–1922) benannt.

Bedingung (9) heißt Markov-Bedingung und besagt:
Wenn wir den Zustand i zum Zeitpunkt t kennen, so hängt die Übergangswahrscheinlichkeit zum Folgezustand j nur von i und j ab. Die Vergangenheit (Zustände zu Zeitpunkten $< t$) der Markov-Kette spielt keine Rolle. Das „Gedächtnis" der Markov-Kette besteht also nur aus ihrem aktuellen Zustand und sie „weiß" nicht, wie sie dorthin gekommen ist.

Bei einer zeithomogenen Markov-Kette hat die (absolute) Zeit t keinen Einfluss auf die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij}, d.h. das Systemverhalten wird nur durch den aktuellen Zustand bestimmt und nicht durch eine absolute Uhr.

Wahrscheinlichkeitsraum einer Markov-Kette

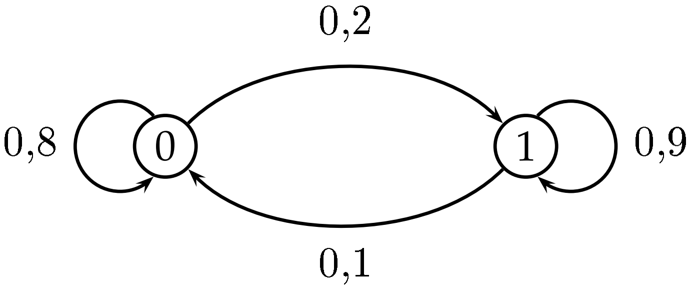
Nehmen wir an, dass wir die Kette von der Zeit 0 bis zur Zeit t_0 beobachten wollen. Wir bezeichnen die Folge von Zuständen, die von der Kette in dieser Zeit durchlaufen wurde, mit $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{t_0})$. $\Omega \subseteq S^{t_0+1}$ sei die Menge möglicher Zustandsfolgen. Einer beliebigen Folge $\omega := (x_0, x_1, \ldots, x_{t_0}) \in \Omega$ ordnen wir die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[\omega] = (q_0)_{x_0} \cdot \prod_{i=1}^{t_0} \Pr[X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}]$$

zu. Dadurch erhalten wir einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum im Sinne der Definition.

Beispiel 124

$$\Pr[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1] = 0{,}9, \;\; \Pr[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 0] = 0{,}2$$
$$\Pr[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1] = 0{,}1, \;\; \Pr[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0] = 0{,}8$$



Einen bestimmten Ablauf des Systems kann man sich als so genannten Random Walk vorstellen.

Wenn wir uns beispielsweise zum Zeitpunkt $t = 0$ im Knoten 1 (also $X_0 = 1$) befinden, dann führen von dort zwei Kanten weiter, nämlich zu den Knoten 0 und 1. Diese Kanten sind mit Wahrscheinlichkeiten beschriftet, die sich zu Eins addieren. Gemäß dieser Wahrscheinlichkeiten entscheiden wir zufällig, wohin wir uns im nächsten Schritt begeben.

Wir können auch die Frage beantworten, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir uns zum Zeitpunkt $t = 2$ im Knoten 1 befinden. Da wir vereinbarungsgemäß beim Knoten 1 starten, gibt es zwei mögliche Wege der Länge zwei durch den Graphen mit Endknoten 1, nämlich „111“ und „101“. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Wege lauten $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}9^2$ bzw. $0{,}1 \cdot 0{,}2$. Insgesamt erhalten wir also eine Wahrscheinlichkeit von $0{,}81 + 0{,}02 = 0{,}83$.

Auch eine Aussage über die erwartete Anzahl Schritte, die wir im Knoten 1 bis zum ersten Übergang zu Knoten 0 verbleiben, ist schnell getroffen. Die Wahrscheinlichkeit, dass man genau k Schritte verbleibt, ist $(0{,}9)^k \cdot 0{,}1$. Die Anzahl Schritte ist also geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $0{,}1$. Der Erwartungswert ist daher $1/0{,}1 = 10$.

2.2 Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten

Wir beschreiben die Situation zum Zeitpunkt t durch einen Zustandsvektor q_t (den wir als Zeilenvektor schreiben). Die i-te Komponente $(q_t)_i$ bezeichnet dabei die Wahrscheinlichkeit, mit der sich die Kette nach t Schritten im Zustand i aufhält.

Es gilt

$$\Pr[X_{t+1} = k] = \sum_{i=0}^{n-1} \Pr[X_{t+1} = k \mid X_t = i] \cdot \Pr[X_t = i],$$

also

$$(q_{t+1})_k = \sum_{i=0}^{n-1} p_{ik} \cdot (q_t)_i,$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$q_{t+1} = q_t \cdot P.$$

Mit der Matrixschreibweise können wir q_t einfach durch die Startverteilung q_0 ausdrücken:

$$q_t = q_0 \cdot P^t \ .$$

Ebenso gilt wegen der Zeithomogenität allgemein für alle $t, k \in \mathbb{N}$:

$$q_{t+k} = q_t \cdot P^k.$$

Die Einträge von P^k geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Übergang vom Zustand i zum Zustand j in genau k Schritten erfolgt.

$$p_{ij}^{(k)} := \Pr[X_{t+k} = j \mid X_t = i] = (P^k)_{ij}.$$

Exponentiation von Matrizen

Wenn P diagonalisierbar ist, so existiert eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix B, so dass $P = B \cdot D \cdot B^{-1}$ gilt. Diese erhalten wir durch Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von P und durch Transformation von P in den Raum der Eigenvektoren.

Dann gilt

$$P^k = B \cdot D^k \cdot B^{-1} .$$

Beispiel 125

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

Durch Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix $(P - \lambda \cdot I)$ erhalten wir die Eigenwerte $0{,}7$ und 1, sowie die zugehörigen (rechten) Eigenvektoren

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \nu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 125

Damit

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich beispielsweise

$$P^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}562 & 0{,}438 \\ 0{,}219 & 0{,}781 \end{pmatrix}$$

2.3 Ankunftswahrscheinlichkeiten und Übergangszeiten

Bei der Analyse von Markov-Ketten treten oftmals Fragestellungen auf, die sich auf zwei bestimmte Zustände i und j beziehen:

- Wie wahrscheinlich ist es, von i irgendwann nach j zu kommen?
- Wie viele Schritte benötigt die Kette im Mittel, um von i nach j zu gelangen?

Definition 126

Die Zufallsvariable

$$T_{ij} := \min\{n \geq 0 \mid X_n = j, \text{ wenn } X_0 = i\}$$

zählt die Anzahl der Schritte, die von der Markov-Kette für den Weg von i nach j benötigt werden. T_{ij} nennen wir die Übergangszeit (engl. hitting time) vom Zustand i zum Zustand j. Wenn j nie erreicht wird, setzen wir $T_{ij} = \infty$.

Ferner definieren wir $h_{ij} := \mathbb{E}[T_{ij}]$.

Die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand i nach beliebig vielen Schritten in den Zustand j zu gelangen, nennen wir Ankunftswahrscheinlichkeit f_{ij}. Formal definieren wir

$$f_{ij} := \Pr[T_{ij} < \infty].$$

Im Fall $i = j$ gilt $T_{ii} = 0$ und somit auch $h_{ii} = 0$, sowie $f_{ii} = 1$. Anschaulich ist dies klar: Wenn Anfangs- und Zielzustand identisch sind, so ist die Übergangszeit gleich Null. Für viele Zwecke ist es andererseits auch interessant zu messen, wie lange es dauert, bis Zustand i zu einem *späteren* Zeitpunkt wieder besucht wird. Wir ergänzen Definition 126 für diesen Fall.

Definition 127

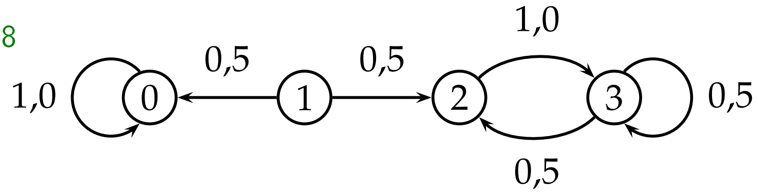
Die Zufallsvariable

$$T_i := \min\{n \geq 1 \mid X_n = i, \text{ wenn } X_0 = i\}$$

zählt die Anzahl Schritte, die von der Markov-Kette benötigt werden, um von i nach i zurückzukehren (Rückkehrzeit, engl. recurrence time). Der Erwartungswert sei $h_i := \mathbb{E}[T_i]$. Die Wahrscheinlichkeit, mit der T_i einen endlichen Wert annimmt, nennt man Rückkehrwahrscheinlichkeit:

$$f_i := \Pr[T_i < \infty].$$

Beispiel 128

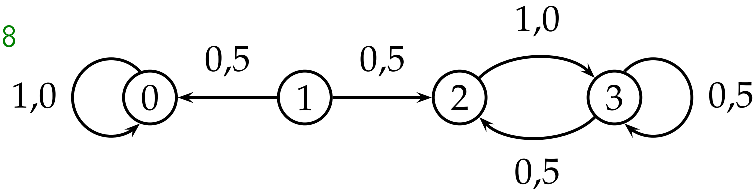


Beispiel zur Berechnung von f_{ij} und h_{ij}

Wir betrachten die obige Markov-Kette. Einige Besonderheiten fallen sofort auf:

- Beginnt man im Zustand 0, so kann man niemals einen der übrigen Zustände erreichen. Die Übergangszeiten T_{01}, T_{02} und T_{03} sind daher ∞.

Beispiel 128

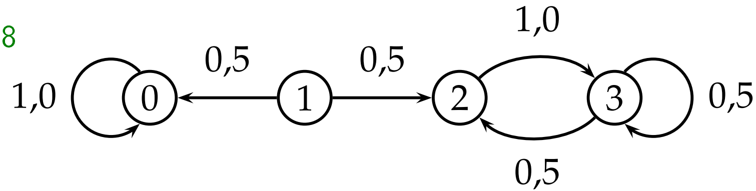


- Beginnt man im Zustand 1, so entscheidet sich im ersten Schritt, ob die Kette sich zukünftig im „linken Teil" (Zustand 0) oder im „rechten Teil" (Zustand 2 und 3) aufhält. Für die Übergangszeit T_{10} gilt daher

$$T_{10} = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_1 = 0, \\ \infty & \text{falls } X_1 = 2. \end{cases}$$

Wegen $\Pr[X_1 = 0 \mid X_0 = 1] = 0{,}5$ folgt $f_{10} = 0{,}5$ und $\mathbb{E}[T_{10}]$ existiert nicht.

Beispiel 128



- Beginnt man im Zustand 2 oder 3, so wird die Kette auch weiterhin zwischen den Zuständen 2 und 3 „hin und her pendeln". Genauer:
  Die Anzahl der Schritte, in denen die Kette im Zustand 3 bleibt, ist geometrisch verteilt mit Parameter $0{,}5$. Der Zustand 3 wird daher im Mittel nach $1/0{,}5 = 2$ Schritten verlassen. Da Zustand 2 der einzige Nachbar von 3 ist, folgt $h_{32} = 2$ und somit insbesondere auch $f_{32} = 1$.

Lemma 129

Für die erwarteten Übergangs-/Rückkehrzeiten gilt

$$h_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \text{ für alle } i, j \in S, i \neq j,$$

$$h_j = 1 + \sum_{k \neq j} p_{jk} h_{kj} \ ,$$

sofern die Erwartungswerte h_{ij} und h_{kj} existieren.

Für die Ankunfts-/Rückkehrwahrscheinlichkeiten gilt analog

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} \text{ für alle } i, j \in S, i \neq j;$$

$$f_j = p_{jj} + \sum_{k \neq j} p_{jk} f_{kj} \ .$$

Beweis:

Sei $i \neq j$. Wir bedingen auf das Ergebnis des ersten Schritts der Markov-Kette und erhalten aufgrund der Gedächtnislosigkeit $\Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = k] = \Pr[T_{kj} < \infty]$ für $k \neq j$ sowie $\Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = j] = 1$.

$$f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = \sum_{k \in S} \Pr[T_{kj} < \infty \mid X_1 = k] \cdot p_{ik}$$
$$= p_{ij} + \sum_{k \neq j} \Pr[T_{kj} < \infty] \cdot p_{ik} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}\,.$$

Die Ableitung für f_j (also $i = j$) ist analog.

Beweis:

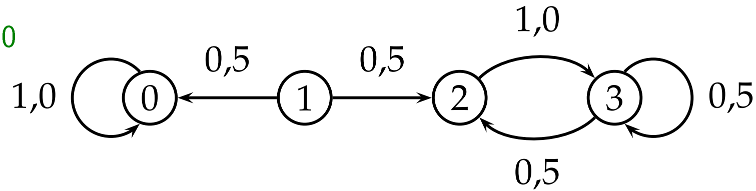
Sei wiederum $i \neq j$. Wegen der Gedächtnislosigkeit folgt $\mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = k] = 1 + \mathbb{E}[T_{kj}]$ für $k \neq j$. Ferner gilt $\mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = j] = 1$.

Bedingen wir wieder auf das Ergebnis des ersten Schritts, so folgt (siehe Satz 36):

$$\begin{aligned} h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}] &= \sum_{k \in S} \mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = k] \cdot p_{ik} \\ &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} (1 + \mathbb{E}[T_{kj}]) \cdot p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} h_{kj} \cdot p_{ik}. \end{aligned}$$

Wiederum ist die Herleitung für h_j analog. □

Beispiel 130



Für die Berechnung der Übergangszeiten für die Zustände 2 und 3 erhalten wir die Gleichungen

$$h_2 = 1 + h_{32}, \qquad h_3 = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot h_{23}$$

und

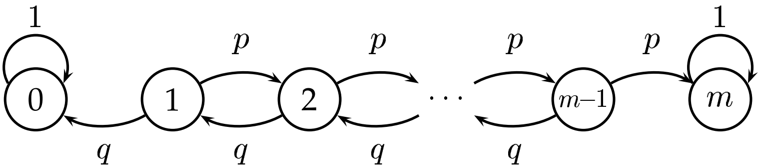
$$h_{23} = 1, \qquad h_{32} = 1 + \tfrac{1}{2} h_{32} = 2\,.$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhalten wir die Werte $h_2 = 3$, $h_3 = 1{,}5$, $h_{23} = 1$ und $h_{32} = 2$, die man leicht verifiziert. Die Ankunftswahrscheinlichkeiten lassen sich analog herleiten. Man erhält $f_2 = f_3 = f_{23} = f_{32} = 1$.

2.4 Das Gambler's Ruin Problem

Anna und Bodo spielen Poker, bis einer von ihnen bankrott ist. A verfügt über Kapital a, und B setzt eine Geldmenge in Höhe von $m - a$ aufs Spiel. Insgesamt sind also m Geldeinheiten am Spiel beteiligt. In jeder Pokerrunde setzen A und B jeweils eine Geldeinheit. A gewinnt jedes Spiel mit Wahrscheinlichkeit p. B trägt folglich mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ den Sieg davon. Wir nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeiten vom bisherigen Spielverlauf und insbesondere vom Kapitalstand der Spieler unabhängig sind.

Wir modellieren das Spiel durch die Markov-Kette



A interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit, mit der sie B in den Ruin treibt, also für die Wahrscheinlichkeit $f_{a,m}$ (wir schreiben hier der Deutlichkeit halber $f_{i,j}$ statt f_{ij}).

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f_{i,m} &= p \cdot f_{i+1,m} + q \cdot f_{i-1,m} \text{ für } 1 \leq i < m-1, \qquad (10) \\ f_{m-1,m} &= p + q \cdot f_{m-2,m}, \\ f_{0,m} &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen nun $f_{i,m}$ allgemein als Funktion von m berechnen. Dazu beobachten wir zunächst, dass wir (10) wegen $f_{m,m} = 1$ umschreiben können zu

$$f_{i+1,m} = (1/p) \cdot f_{i,m} - (q/p) \cdot f_{i-1,m} \text{ für } 1 \leq i < m. \tag{11}$$

Wir ergänzen (11) um die Anfangswerte

$$f_{0,m} = 0 \text{ und } f_{1,m} = \xi.$$

(Für den Moment fassen wir ξ als Variable auf. Nach Lösung der Rekursion werden wir ξ so wählen, dass die Bedingung $f_{m,m} = 1$ erfüllt ist.)

Als Lösung dieser linearen homogenen Rekursionsgleichung 2. Ordnung (11) ergibt sich für $p \neq 1/2$:

$$f_{i,m} = \frac{p \cdot \xi}{2p-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i\right).$$

Setzen wir nun $i = m$, so folgt aus $f_{m,m} = 1$, dass

$$\xi = \frac{2p-1}{p \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m\right)}$$

gelten muss.

Insgesamt erhalten wir somit das Ergebnis:

$$f_{j,m} = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^j}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}.$$

Für $p = 1/2$ verläuft die Rechnung ähnlich.

Beispiel 131

Wir wollen berechnen, wie lange A und B im Mittel spielen können, bis einer von ihnen bankrott geht.

$h_{a,m}$ eignet sich dazu i.a. nicht (warum?).

Wir betrachten stattdessen:

$$T_i' := \text{„Anzahl der Schritte von Zustand } i \text{ nach Zustand 0 oder } m\text{“}$$

und setzen

$$d_i := \mathbb{E}[T_i'].$$

Offensichtlich gilt $d_0 = d_m = 0$ und für $1 \leq i < m$

$$d_i = qd_{i-1} + pd_{i+1} + 1 \; .$$

Beispiel (Forts.)

Wir betrachten nun nur den Fall $p = q = 1/2$ *und erhalten*

$$d_i = i \cdot (m - i) \text{ für alle } i = 0, \ldots, m.$$

Wegen $d_i \leq mi \leq m^2$ *folgt also, dass das Spiel unabhängig vom Startzustand im Mittel nach höchstens* m^2 *Schritten beendet ist.*

2.5 Stationäre Verteilung

Reale dynamische Systeme laufen oft über eine lange Zeit. Für solche Systeme ist es sinnvoll, das Verhalten für $t \to \infty$ zu berechnen.

Wir betrachten wieder die Markov-Kette aus unserem Beispiel. Wir hatten gezeigt, dass für die Übergangsmatrix P gilt:

$$P = B \cdot D \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$P^t = B \cdot D^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{10}\right)^t & 0 \\ 0 & 1^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

und für $t \to \infty$ erhalten wir

$$\lim_{t \to \infty} P^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Für eine beliebige Startverteilung $q_0 = (a, 1-a)$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} q_t = \lim_{t\to\infty} q_0 \cdot P^t &= (a, 1-a) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}(1-a),\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}(1-a)\right) = (\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}).\end{aligned}$$

Das System konvergiert also unabhängig vom Startzustand in eine feste Verteilung. Der zugehörige Zustandsvektor $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ hat eine interessante Eigenschaft:

$$\pi \cdot P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \pi.$$

π ist also ein Eigenvektor der Matrix P zum Eigenwert 1 bezüglich Multiplikation von links. Dies bedeutet: Wenn die Kette einmal den Zustandsvektor π angenommen hat, so bleibt dieser bei allen weiteren Übergängen erhalten.

Definition 132

P sei die Übergangsmatrix einer Markov-Kette. Einen Zustandsvektor π mit $\pi = \pi \cdot P$ nennen wir stationäre Verteilung der Markov-Kette.

Besitzen alle Markov-Ketten die Eigenschaft, dass sie unabhängig vom Startzustand in eine bestimmte stationäre Verteilung konvergieren?

Nein!