Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 4
5. Mai 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 14. Mai 2014, 10 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir greifen Tutoraufgabe 4 von Blatt 2 auf und wandeln die Einkleidung der Aufgabe wie folgt geringfügig ab. Wir haben n Schlüssel ungeordnet in der Tasche. Genau einer davon passt für die Tür, die wir öffnen wollen. Wir können die Schlüssel nur einzeln Laplace-zufällig aus der Tasche ziehen, testen, ob der Schlüssel sperrt, und auf dem Tisch ablegen, wenn er nicht sperrt. Wir ziehen so lange, bis der richtige Schlüssel gefunden wurde.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der k-te Schlüssel passt? $(1 \leq k \leq n)$

1. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit, indem Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit verwenden, im nächsten Zug den richtigen Schlüssel zu ziehen (siehe TA 4).

2. Stellen Sie sich nun vor, alle Schlüssel zu ziehen und der gezogenen Reihe nach auf den Tisch zu legen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der richtige Schlüssel an der k-ten Stelle auf dem Tisch und wie kann man zu deren Berechnung das Gleichverteilungsargument ins Spiel bringen?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir führen die vorausgehende Aufgabe mit n Schlüsseln fort. Leider ist die zu öffnende Tür nun eine stark gesicherte Tresortür, zu deren Öffnung man beide der einzigen zwei passenden Schlüsseln benötigt.

Wir beschreiben die Schlüsselmenge durch eine n-elementige Multimenge S von Buchstaben f und w, die genau zweimal den Buchstaben w enthält.
Sei $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ eine Anordnung (Wort) aller Buchstaben von S, d.h. es gibt genau zwei i mit $x_i = w$. Dann stellt x eine vollständige Ziehung der Schlüssel dar. Seien $\Omega = \{x\,;\, x \text{ ist eine Anordnung von } S\}$ und $\Pr$ die Laplace-Gleichverteilungsdichte auf Ω. Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ die Zufallsvariable über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$, so dass $X(x) = i$ genau dann gilt, wenn $x_j = x_i = w$ für ein $j < i$ gilt.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man in der k-ten Ziehung die zwei passenden Schlüssel erstmals vorliegen?

2. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ in Abhängigkeit von n! Testen Sie Ihre Formel auf Korrektheit mit Hilfe der Ergebnisse aus VA 1 von Blatt 3.

   Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$. (Siehe DS Vorl.)

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten drei 6-seitige Würfel A, B und C. Würfel A hat 4 rote und 2 blaue Seiten. Würfel B hat 2 rote und 4 blaue Seiten. Der Würfel C ist ein üblicher Würfel, der die Augenzahlen 1 bis 6 zeigt. Wir nehmen an, dass das Auftreten von Würfelseiten bei Würfen Laplace-verteilt ist.

Experiment: Es wird zunächst C geworfen. Falls die 6 geworfen wurde, so wird Würfel B gewählt, ansonsten wird Würfel A gewählt. Mit dem gewählten Würfel werden dann $n \geq 3$ Würfe durchgeführt. Das Ergebnis ist ein Wort $w \in \{\text{rot}, \text{blau}\}^*$ der Länge n.

1. Wir sagen, dass das Ereignis R_i eintritt, wenn das i-te Zeichen der Ausgabe w des Experiments 'rot' ist. Wir nehmen an, dass die Ereignisse R_1 und R_2 eingetreten sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das Ereignis R_3 eintritt?

2. Wir nehmen an, dass das Ereignis $\bigcap_{i=1}^{n} R_i$ eingetreten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Experiment der Würfel B gewählt wurde?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Eine unfaire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf“ und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ „Zahl“ zeigt, wobei $0 \leq p \leq 1$ und $p \neq \frac{1}{2}$ gilt. Wir werfen eine solche Münze n mal und erhalten dabei k mal „Kopf“ und $n-k$ mal „Zahl“.

1. Beschreiben Sie das Experiment durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $W = (\Omega_n, \Pr)$.

2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass genau k-mal Kopf erscheint.

Zusatzaufgabe 1 (wird nicht korrigiert)

Die erhaltenen Punkte bei 4 Aufgaben A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 eines Übungsblattes seien bei vollständiger Korrektur a_1, a_2, a_3 bzw. a_4. Die erhaltene Punktesumme ist dann $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Zur Reduzierung der Korrekturarbeit werden Laplace-zufällig 2 Aufgaben ausgewählt, diese beiden Aufgaben vollständig korrigiert und anschließend die Punktesumme P der beiden Aufgaben verdoppelt gutgeschrieben.

Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[P]$ der gutgeschriebenen Punktesumme!

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

In der statistischen Physik pflegt man die Verteilung gewisser Teilchen (Moleküle, Photonen, Elektronen, usw.) zu betrachten. Man nimmt an, dass sich jedes Teilchen durch einen Vektor von Kenngrößen charakterisieren läßt, der der Zuordnung des Teilchens in eine von N „Zellen“ eines „Phasenraumes“ entspricht. Der Zustand eines physikalischen Systems wird dann dadurch beschrieben, dass man angibt, wie viele Teilchen sich jeweils in einer Zelle befinden.

Die Annahme, dass jede Lage eines n Gasmoleküls in N Zellen gleichwahrscheinlich ist, ist Basis der *Maxwell-Boltzmannsche Statistik*. Dabei wird die Unterscheidbarkeit der Gasmoleküle vorausgesetzt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(k,n)$, dass sich genau k Gasmoleküle in einer beliebigen Zelle Z der N Zellen befinden, einer Binomialverteilung genügen und zeigen Sie dazu

$$p(k,n) = b(k;n,\tfrac{1}{N}) := \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-k} .$$

Vorbereitung 2

Wiederholen Sie die Tutoraufgabe 4 von Blatt 3.

Vorbereitung 3

1. Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

   Z := Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis zum dritten Mal `O` gezogen wurde.

2. Inwiefern kann man behaupten, dass die negative Binomialverteilung sowohl die geometrische Verteilung als auch die Binomialverteilung als Spezialfälle enthält?

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die statistische Verteilung von Photonen bzw. Elektronen.

Photonen und Elektronen werden nicht als unterscheidbare Teilchen betrachtet. Demgemäß gilt die Maxwell-Boltzmannsche Statistik (siehe VA 1) nicht.

Die auf der Annahme der Nichtunterscheidbarkeit von Teilchen beruhende Statistik nennt man *Bose-Einsteinsche Statistik*. Sie wird für Photonen angewendet.

Für Elektronen hat man noch die zusätzliche Einschränkung (*Paulisches Prinzip*), dass sich in einer Zelle stets höchstens ein Teilchen befinden kann. Diesen Umstand berücksichtigt die *Fermi-Diracsche Statistik*.

Man nimmt wie in VA 1 an, dass sich jedes Teilchen durch einen Vektor von Kenngrößen charakterisieren läßt, der der Zuordnung des Teilchens in eine von N „Zellen“ eines „Phasenraumes“ entspricht, Der Zustand des Phasenraumes wird beschrieben, indem man angibt, wie viele Teilchen sich jeweils in einer Zelle befinden.

1. Bestimmen Sie nach Bose-Einstein die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer bestimmten Zelle von N Zellen k von n Photonen befinden.

2. Bestimmen Sie nach Fermi-Dirac die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer bestimmten Zelle von N Zellen eines von n Elektronen befindet.

Tutoraufgabe 2

1. Zeigen Sie für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$|\{(s_1, \ldots, s_j) \in \{1, \ldots, n\}^j \,;\, s_1 + \ldots + s_j \leq n\}| = \binom{n}{j}.$$

2. Sie führen das folgende mehrstufige Experiment durch:

   In jedem Schritt wählen Sie zufällig und gleichverteilt eine Zahl zwischen 1 und n aus, d. h., in jedem Schritt und für alle i mit $1 \leq i \leq n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Zahl i ziehen, gleich $\frac{1}{n}$. Das Experiment endet, nachdem die Summe der gezogenen Zahlen das erste Mal größer als n ist. Die Zufallsvariable X gibt an, nach wie vielen Schritten das Experiment endet.

   Zeigen Sie:

$$\Pr[X \geq j+1] = \frac{\binom{n}{j}}{n^j} \quad \text{für alle } j = 0, 1, \ldots\ .$$

3. Folgern Sie

$$\mathbb{E}[X] = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Tutoraufgabe 3

Mit einem fairen Würfel mit Augenzahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wird wie folgt gespielt. Beim Start wird der Würfel 1 Mal geworfen. Die geworfene Augenzahl sei x. Dem Wurf geben wir die Nummer 0. Nun wird so lange gewürfelt, bis wieder x erscheint. Die dabei (nach dem Wurf Nummer 0) geworfenen Augenzahlen y mit $y \neq x$ werden addiert. Das Ergebnis sei die Zufallsvariable Z.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X_i die Augenzahl im i-ten Wurf mit $1 \leq i \leq n-1$. Sei $Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z_n unter der Bedingung, dass beim Start die Augenzahl x geworfen wurde und das Spiel im n-ten Schritt endet.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel im n-ten Schritt?

3. Geben Sie für Z den Erwartungswert an.

4. Beschreiben Sie mit Hilfe der Faltung von Dichtefunktionen $f_{X_i}, i = 1, 2, \ldots$ ein Verfahren zur Berechnung der Dichtefunktion f_Z.