

SS 2014

# Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/dwt/uebung/>

10. April 2014

# ZÜ I

## Übersicht:

1. Organisation
2. Ziele der ZÜ
3. Thema           Arbeitsblatt 1
4. Vorbereitung    TA Blatt 1
5. Hin.Ti's         HA von Blatt 1

# 1. Organisation der Zentralübung

- **Zeit:** Do 14.00–15.00      **Ort:** Physik HS1

**Ausnahmen:**

Siehe Termine auf der Übungswebseite.

- **Webseite:**

<http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/dwt/uebung/>

- Kontakt Dr. W. Meixner:
  - Epost: [meixner@in.tum.de](mailto:meixner@in.tum.de)
  - Telefon: 089 289 17713
  - Raum: MI 03.09.040
  - Sprechstunde: n.V.
  
- Material:
  - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
  - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie
  - ttt-Aufzeichnung
  - Hin.Ti's

## 2. Ziele der Zentralübung

Diese sind: Spezielle und Allgemeine **didaktische Ziele** im Sinne einer Verstärkung des Erfolges beim Studium der DWT.

### Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor- bzw. Hausaufgaben der DWT Übungsblätter.
- **Persönliche Kommunikation**

### Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Informelle **Metasprache** und übergeordnete **Interpretation**
- **Thema der Woche.**

### 3. Thema Arbeitsblatt 1: Informelle Begriffe der W'theorie

Was bedeutet der Begriff „Ereignis“?

Ist die Zahl 5  
ein „Elementarereignis“?

Was meint der Begriff  
„Zufall“?

Ist „Wahrscheinlichkeit“ messbar?

Man kann ohne zu übertreiben behaupten:

Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe stehen

im Zentrum jeder naturwissenschaftlichen Theoriebildung.

Ebenso wahr ist aber, dass in vielen Studiengängen eben diese wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe erkenntnistheoretisch falsch und insbesondere z.B. nur als „Umrahmung“ der Statistik gedeutet werden.

## 3.1 Ereignis

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist Teil der natürlichen Logik, mit der wir eine sich verändernde Welt logisch analysieren.

Im Zentrum dieser Logik stehen u. a. die Begriffe „Ereignis“ und „Vorgang“.

Ein Ereignis „tritt ein“ oder „kommt vor“  
stets als „Ergebnis“ eines Vorgangs.

Umgekehrt schließt jeder Vorgang ab  
mit dem „Eintreten“ oder „Vorkommen“ eines Ereignisses,  
das sein Ergebnis darstellt.



## 3.2 Ereignisalgebra:

Das Eintreten eines Ereignisses wird durch eine **Aussage** festgestellt.

Insofern besitzt die **Gesamtheit der möglichen Ereignisse** eines Experiments oder Versuchs  $\mathcal{V}$  stets die Struktur der **Gesamtheit von Aussagen** der Art, dass

ein Ergebnis  $x$  mit einer Eigenschaft  $E$  aufgetreten ist.

Die Struktur der möglichen Ereignisse eines Experiments ist also eine **Boolsche Algebra**. Die möglichen Ereignisse bilden in ihrer Gesamtheit eine Boolsche Algebra, die man auch „**Ereignisalgebra**“ nennt.

Wie jede Boolesche Algebra, so ist auch eine Ereignisalgebra **isomorph einer Mengenalgebra**  $\mathcal{A}$ , die aus Teilmengen einer Basismenge  $\Omega$  besteht, wobei  $\emptyset \in \mathcal{A}$  und  $\Omega \in \mathcal{A}$  gelten.

Die Elemente von  $\Omega$  nennt man in diesem Zusammenhang auch „**Elementarereignisse**“ oder Ergebnisse, insbesondere nennt man  $\Omega$  die **Ergebnismenge** der Ereignisalgebra.

Jede Menge  $A \in \mathcal{A}$  nennt man ein **Ereignis**.

**Man beachte**, dass ein sogenanntes Elementarereignis  $x \in \Omega$  **kein Ereignis** ist, da  $x \notin \mathcal{A}$  gilt.

Die Ergebnismenge  $\Omega$  ist der Träger der Menge  $\mathcal{A}$  der Ereignisse.

Sei  $A \in \mathcal{A}$ .

Wenn bei Durchführung des Experiments  $\mathcal{V}$  das Ergebnis  $x \in \Omega$  auftritt und  $x \in A$  gilt, dann hat das Ereignis  $A$  stattgefunden.

Falls  $x \notin A$  gilt, dann hat das Ereignis  $A$  nicht stattgefunden, wohl aber das Ereignis  $\overline{A}$ , d.h. das Komplement von  $A$  in  $\Omega$ .

## 3.3 Vorkommen und Häufigkeit

Vorkommen sind zählbar:

In der Informatik werden Vorgänge präzise durch Algorithmen beschrieben. In der Physik nennt man diese präzisen Beschreibungen „Experimente“.

Der Vorgang, der bei „Ausführung“ von (Anweisungen in) Algorithmen bzw. Experimenten „stattfindet“, „erzeugt“ Vorkommen von Ereignissen.

### 3.4 Häufigkeit:

Ein wesentliches Bestimmungsmerkmal der logischen Kategorie Vorgang ist die „Wiederholbarkeit“.

Grundsätzlich können sich Vorgänge wiederholen mit „gleichen“ Ereignisvorkommen als Ergebnis. Man denke z. B. an die wiederholte Ausführung von Algorithmen oder Experimenten in einem gleichen Kontext.

Ereignisse können „mehrfach vorkommen“ und alle Vorkommen eines bestimmten Ereignisses sind gleich.

Ein Vorgang endet mit einem (wiederholten) Vorkommen eines Ereignisses.

Die Kardinalität der Multimenge der Vorkommen eines Ereignisses nennt man „Häufigkeit“ des Ereignisses.

Häufigkeiten sind stets natürliche Zahlen, also insbesondere endliche Zahlen.

Abstrakt wird der Begriff der Häufigkeit durch **Multimengen** beschrieben, wobei eine „Multimenge“ als eine Zusammenfassung von Vorkommen von Elementen einer Menge definiert wird.

Damit erweist sich der Multimengenbegriff als ein zentraler Begriff der Wahrscheinlichkeitstheorie bei der „**Messung von Wahrscheinlichkeiten**“.

### 3.5 Wahrscheinlichkeit:

Es ist prinzipiell **nicht** möglich, eine „Menge“ zu bilden über „zukünftige“ Vorkommen von Ereignissen oder Wiederholungen von Experimenten.

Zukünftiges kann nur Gegenstand von „Hypothesen“ sein.

Es ist aber prinzipiell möglich, Gesetzmäßigkeiten aufzustellen, denen jede Hypothesenbildung unterworfen sein muss.

Das System der „Wahrscheinlichkeit“ von Ereignissen eines gegebenen Kontextes ist ein System von hypothetischen Grenzwerten der „relativen Häufigkeit“ dieser Ereignisse.

### Gesetze:

- Damit ist jedem Ereignis  $A$  eine nicht negative reelle Zahl  $P(A)$  zwischen 0 und 1 zugeordnet.
- Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von (abzählbar vielen) Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen, ist die Summe der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der einzelnen Ereignisse.



Tatsächlich ist es so,  
dass jede **Ergebnisprognose** für einen realen Vorgang  
grundsätzlich nichts anderes sein kann als  
eine **Annahme in einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Raum**.

Das Tupel  $(\mathcal{A}, P)$  einer Mengenalgebra  $\mathcal{A}$  von sogenannten Ereignissen und der Funktion  $P$  mit den genannten Eigenschaften nennt man auch

*Wahrscheinlichkeitsalgebra mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ .*

Falls  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, dann nennt man

$$\mathcal{W} = (\Omega, \mathcal{A}, P)$$

einen *Kolmogoroffschen Wahrscheinlichkeitsraum*.

**Spezialfall:**

Falls  $\Omega$  abzählbar ist und  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  gilt, dann nennt man  $\mathcal{W}$  einen **diskreten** Wahrscheinlichkeitsraum.

Der **wichtigste Begriff** der Wahrscheinlichkeitstheorie ist:

Die abzählbare Summe von Maßbeträgen (eines Wahrscheinlichkeitsmaßes) einer abzählbaren Menge von disjunkten Ereignissen (einer  $\sigma$ -Algebra).

## 4. Vorbereitung auf TA Blatt 1

### 4.1 VA 1

- 1 Machen Sie sich die begrifflichen Unterschiede klar, wenn wir von „Ereignis“, „Elementarereignis“ oder „Ergebnismenge“ sprechen.

## Antwort:

Die Mengenlehre gehört zu demjenigen Teil der natürlichen Logik, mit dem wir eine „statische“ Welt logisch analysieren.

Der **Wahrscheinlichkeitsbegriff** gehört zu demjenigen Teil der natürlichen Logik, mit dem wir eine sich **verändernde** („dynamische“) Welt logisch analysieren.

Im Zentrum dieser Logik stehen u. a. die Begriffe „**Ereignis**“ und „**Vorgang**“.

Ein Ereignis „tritt ein“ oder „kommt vor“ stets als „Ergebnis“ eines Vorgangs.

Umgekehrt schließt jeder Vorgang ab mit dem „Eintreten“ oder „Vorkommen“ eines Ereignisses, das sein Ergebnis darstellt.

Die logischen Kategorien

Ereignis und Vorgang bedingen sich gegenseitig.

Also:

Die Zahl 5 ist kein Ereignis, sondern Element einer Menge.

Die Zahl 5 stellt aber zusammen mit einem Algorithmus ein (Elementar-)Ereignis dar, das eintreten kann, wenn der Algorithmus den Wert 5 liefert.

## Zusammenfassung:

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist auf einer „algorithmischen“ Mengenlehre gegründet.

In der Informatik werden Vorgänge präzise durch (nicht notwendig deterministische) Algorithmen beschrieben.

In der Physik nennt man diese präzisen Beschreibungen „Experimente“.

Der Vorgang, der bei „Ausführung“ von (Anweisungen in) Algorithmen bzw. Experimenten „stattfindet“, „erzeugt“ Vorkommen von Ereignissen.



## Zurück zur Aufgabenstellung von VA 1.1:

Das **Ergebnis**  $x$  eines Vorgangs wird beobachtet oder gemessen. Dabei wird eine Eigenschaft  $E(x)$  des Ergebnisses festgestellt formal in der Form  $x \in E$ , wobei  $E$  eine Menge ist.

Das **Ereignis** wird nun als Menge  $E$  beschrieben, wobei  $E$  eine Menge von möglichen Ergebnissen ist.

Die Zusammenfassung aller möglichen (Einzel-)Ergebnisse ist die **Ergebnismenge**.

Jedem Ergebnis  $x$  entspricht eine kleinste Menge  $E = \{x\}$ , so dass  $x \in E$  gilt. Diese Menge ist ein **Elementarereignis** und wird (leider) in der Literatur häufig von  $x$  nicht unterschieden.

- ② Begründen Sie den begrifflichen Zusammenhang zwischen endlichen Multimengen und endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

## Lösung:

Sei  $M$  eine endliche Multimenge.

Dann gibt es eine Menge  $E$  und eine Funktion  $h : E \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

so dass

jedes Element  $x'$  von  $M$  ein Vorkommen eines Elementes  $x$  von  $E$  ist

und

jedes  $x \in E$  in  $M$  genau  $h(x)$  Vorkommen besitzt.

Damit ist  $(E, \text{Pr})$  mit  $\text{Pr}[x] = \frac{h(x)}{|M|}$  ein diskreter endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

## 4.2 VA 2

- 1 „Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null.“

Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

## Lösung:

Es gibt **keinen** anderen logischen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Ausführung eines Experiments und der jeweils nächsten Ausführung des Experiments **als denjenigen**, dass wiederholte Ausführungen denselben Annahmen über die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen unterliegen.

Die Aussage ist auch deshalb nicht sinnvoll, weil Wahrscheinlichkeiten nicht festgestellt werden (auch nicht auf der Grundlage der Ausführung von Experimenten), sondern Annahmen über die Natur einer experimentellen Anordnung bzw. eines Algorithmus sind.

## Bemerkung:

Dies steht nicht im Widerspruch dazu, dass die Ergebnisse einer wiederholten Ausführung von Experimenten auch zu Änderungen von Wahrscheinlichkeitsannahmen bzw. Räumen führen können.

- ② Eine Box enthalte schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle.

Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{5}$  bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

Wie viele Bälle enthielt die Box zu Beginn?

Es sei **Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit** vorausgesetzt.

## Lösung:

Sei  $n$  die Anzahl der schwarzen Bälle in der Box.  
Dann enthält die Box  $3n$  Bälle.

Nach Entnahme von 2 weißen Bällen befinden sich noch  
 $3n - 2$  Bälle in der Box, von denen  $n$  Stück schwarz sind.

Die Wahrscheinlichkeit, nun einen schwarzen Ball zu ziehen,  
berechnet sich einerseits zu  $\frac{n}{3n-2}$   
und ist andererseits gegeben durch  $\frac{2}{5}$ .

Wir lösen die Gleichung  $\frac{n}{3n-2} = \frac{2}{5}$  nach  $n$  auf und erhalten  $n = 4$ .

**Antwort:** Zu Beginn enthielt die Box 12 Bälle.



## 4.3 VA 3

- 1 Geben Sie ein Beispiel eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.

## Lösung:

Seien  $\Omega = \{1, 2\}$  und  $\Pr[1] = 1, \Pr[2] = 0$ .

Dann ist  $W = (\Omega, \Pr)$

ein endlicher diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Denn offenbar gilt  $0 \leq \Pr[e] \leq 1$  für alle  $e \in \Omega$

und es gilt  $\sum_{e \in \Omega} \Pr[e] = 1$ .

- ② Sei  $(\Omega, \Pr)$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.  
Für Ereignisse  $A$  und  $B$  gelte  $\Pr[A] = 1$  und  $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ .  
Zeigen Sie  $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$ .

## Lösung:

Aus  $1 = \Pr[A] \leq \Pr[A \cup B] \leq 1$   
folgt  $\Pr[A \cup B] = 1$ .

Wegen  $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$  und  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$  gilt

$$\begin{aligned} 1 = \Pr[A \cup B] &= \Pr[(A \setminus B) \cup B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \Pr[B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Es folgt  $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$ .

## 4.4 VA 4

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments  $V$  das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse)  $A$  und  $B$  feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von  $V$  das Eintreten von Ereignissen  $X$  und relativen Häufigkeiten  $h(X)$  wie folgt.

$$\begin{aligned}h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}, \\h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}, \\h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

## Lösung:

Natürlich werden wir die Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse modellieren.

Dies impliziert zunächst, dass  $A$  und  $B$  nicht gleichzeitig als Elementarereignisse  $\{\omega\}$  mit  $\omega \in \Omega$  modelliert werden können.

Dann nämlich müsste das Ereignis  $A \wedge B$  die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen, denn **Elementarereignisse** sind **unvereinbar**.

Wir definieren die Bezeichnungen

$$o_1 = A \wedge B, \quad o_2 = A \wedge \neg B, \quad o_3 = \neg A \wedge B, \quad o_4 = \neg A \wedge \neg B$$

Da die  $o_i$  paarweise widersprüchlich sind und  $o_1 \vee o_2 \vee o_3 \vee o_4$  allgemeingültig (tautologisch) ist, setzen wir

$$\Omega = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}.$$

Die Modellierung der Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten zusammen mit der Gleichung  $\sum_{1 \leq i \leq 4} \Pr(o_i) = 1$  liefert

$$\Pr(o_1) = \frac{1}{6}, \quad \Pr(o_2) = \frac{1}{3}, \quad \Pr(o_3) = \frac{1}{3}, \quad \Pr(o_4) = \frac{1}{6}.$$

Wir bemerken, dass gilt

$$\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}.$$



## 5. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 1

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der DWT-Übungsblätter sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

### ad HA 4.2:

Beachten Sie, dass noch weitere Buchstaben außer  $a, b, c$  in einem Wort der Länge 14 vorkommen müssen. Welche das sind, ist aber irrelevant.