

Beispiel 15 (Ziegenproblem)

Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten “Ich gebe Ihnen mal einen kleinen Hinweis” öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine Ziege schaut heraus und meckert. Er fragt: “Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen sie Nummer zwei? ”

Frage: Welche Strategie ist günstiger:

- S1 Der Spieler bleibt immer bei seiner ursprünglichen Wahl.
- S2 Der Spieler wechselt stets die ausgewählte Tür.

Beispiel (Forts.)

Wir betrachten hier eine Diskussion des Ziegenproblems mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Wir betrachten bei jeder Variante den Fall, dass der Spieler

- a) die "richtige",
- b) eine falsche Tür gewählt hat.

Ersteres geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, Letzteres mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.

Mit der vom Moderator gegebenen Information ergeben sich für die beiden Strategien die folgenden Gewinnwahrscheinlichkeiten:

	S1	S2
a)	?	?
b)	?	?

Häufig verwendet man die Definition der **bedingten Wahrscheinlichkeit** in der Form

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B]. \quad (1)$$

Damit:

Satz 16 (Multiplikationssatz)

Seien die Ereignisse A_1, \dots, A_n gegeben. Falls $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \\ \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \dots \\ \dots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]. \end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst halten wir fest, dass alle bedingten Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert sind, da $\Pr[A_1] \geq \Pr[A_1 \cap A_2] \geq \dots \geq \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$.

Die rechte Seite der Aussage im Satz können wir umschreiben zu

$$\frac{\Pr[A_1]}{1} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdot \dots \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]}{\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]}$$

Offensichtlich kürzen sich alle Terme bis auf $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]$. □

Beispiel 17 (Geburtstagsproblem)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m -köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulierung:

Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in n Körbe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?

Für das Geburtstagsproblem: $n = 365$

Offensichtlich muss $m \leq n$ sein, damit überhaupt jeder Ball allein in einem Korb liegen kann.

Wir nehmen an, dass die Bälle nacheinander geworfen werden. A_i bezeichne das Ereignis „Ball i landet in einem noch leeren Korb“. Das gesuchte Ereignis „Alle Bälle liegen allein in einem Korb“ bezeichnen wir mit A . Nach Satz 16 können wir $\Pr[A]$ berechnen durch

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \Pr[\cap_{i=1}^m A_i] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \dots \cdot \Pr[A_m | \cap_{i=1}^{m-1} A_i].\end{aligned}$$

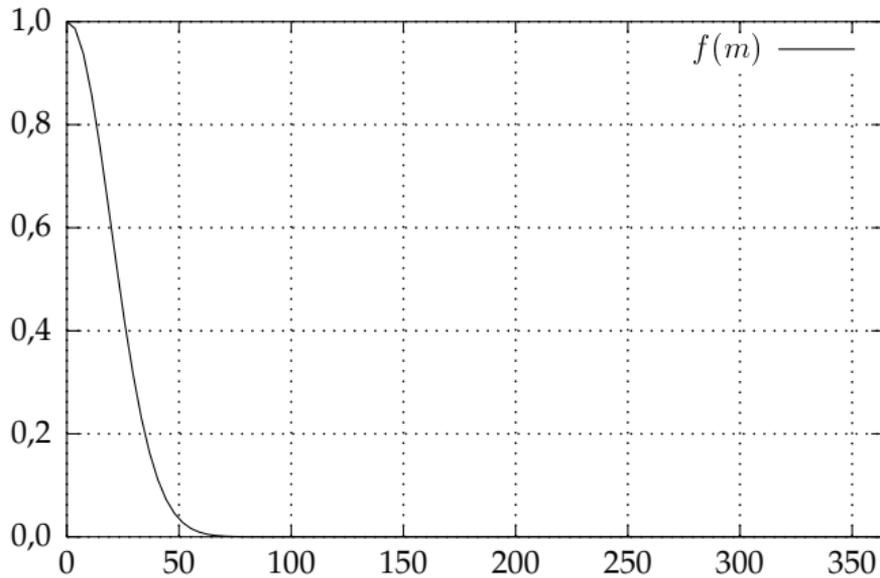
Unter der Bedingung, dass die ersten $j - 1$ Bälle jeweils in einem leeren Korb gelandet sind, bedeutet A_j , dass der j -te Ball in eine der $n - (j - 1)$ leeren Körbe fallen muss, die aus Symmetriegründen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

Daraus folgt

$$\Pr[A_j | \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n - (j - 1)}{n} = 1 - \frac{j - 1}{n}.$$

Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ und wegen $\Pr[A_1] = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Pr[A] &= \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \\ &\leq \prod_{j=2}^m e^{-(j-1)/n} = e^{-(1/n) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} j} \\ &= e^{-m(m-1)/(2n)} =: f(m). \end{aligned}$$



Verlauf von $f(m)$ für $n = 365$

Ausgehend von der Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit in Gleichung 1 zeigen wir:

Satz 18 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$.
Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] .$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse A_1, A_2, \dots mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] .$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst den endlichen Fall. Wir halten fest, dass

$$B = (B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n) .$$

Da für beliebige i, j mit $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$, sind auch die Ereignisse $B \cap A_i$ und $B \cap A_j$ disjunkt. Wegen (1) folgt $\Pr[B \cap A_i] = \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$ (auch für den Fall, dass $\Pr[A_i] = 0!$). Wir wenden nun den Additionssatz (Lemma 8, Teil 5) an

$$\begin{aligned} \Pr[B] &= \Pr[B \cap A_1] + \dots + \Pr[B \cap A_n] = \\ &\Pr[B|A_1] \cdot \Pr[A_1] + \dots + \Pr[B|A_n] \cdot \Pr[A_n] \end{aligned}$$

und haben damit die Behauptung gezeigt. Da der Additionssatz auch für unendlich viele Ereignisse A_1, A_2, \dots gilt, kann dieser Beweis direkt auf den unendlichen Fall übertragen werden. □

Mit Hilfe von Satz 18 erhalten wir leicht einen weiteren nützlichen Satz:

Satz 19 (Satz von Bayes)

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n seien paarweise disjunkt, mit $\Pr[A_j] > 0$ für alle j . Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse A_1, A_2, \dots mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Mit dem Satz von Bayes dreht man gewissermaßen die Reihenfolge der Bedingung um. Gegeben die Wahrscheinlichkeit von B unter den Bedingungen A_i (sowie die Wahrscheinlichkeiten der A_i selbst), berechnet man die Wahrscheinlichkeit von A_i bedingt auf das Ereignis B .

Thomas Bayes (1702–1761) war ein bekannter Theologe und Mitglied der Royal Society. Als sein bedeutendstes Werk gilt sein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie „Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances“. Diese Arbeit wurde erst 1763 publiziert.

3. Unabhängigkeit

Bei einer bedingten Wahrscheinlichkeit $\Pr[A|B]$ kann der Fall auftreten, dass die Bedingung auf B , also das Vorwissen, dass B eintritt, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit der wir das Eintreten von A erwarten. Es gilt also $\Pr[A|B] = \Pr[A]$, und wir nennen dann die Ereignisse A und B **unabhängig**.

Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln)

$$\Omega := \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\} .$$

Alle Elementarereignisse erhalten nach dem Prinzip von Laplace die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Wir definieren die Ereignisse

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Es gilt $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[C] = \frac{1}{6}$. Wie groß ist $\Pr[B|A]$?

Beispiel 20 (Forts.)

Nach unserer Intuition beeinflusst der Ausgang des ersten Wurfs den zweiten Wurf nicht. Daher gewinnen wir durch das Eintreten von A keine Information in Bezug auf das Ereignis B hinzu:

$$B \cap A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}.$$

Daraus folgt

$$\Pr[B|A] = \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[B].$$

Das Eintreffen des Ereignisses B hat mit dem Ereignis A „nichts zu tun“.

Definition 21

Die Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] .$$

Falls $\Pr[B] \neq 0$, so können wir diese Definition zu

$$\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B]$$

umschreiben.

Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln, Forts.)

Zur Erinnerung:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Bei den Ereignissen A und B ist die Unabhängigkeit klar, da offensichtlich kein kausaler Zusammenhang zwischen den Ereignissen besteht. Wie steht es mit A und C ?

$$A \cap C = \{(2, 5), (4, 3), (6, 1)\}$$

und damit

$$\Pr[A \cap C] = \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \Pr[A] \cdot \Pr[C] \text{ bzw. } \Pr[C|A] = \Pr[C] .$$

Beispiel 20 (Forts.)

Also sind auch A und C (und analog B und C) unabhängig.

Bemerkung: Im Beispiel ist $A \cap C \neq \emptyset$.

Es gilt sogar allgemein für zwei unabhängige Ereignisse A und B mit $\Pr[A], \Pr[B] > 0$, dass sie gar nicht disjunkt sein können, da ansonsten

$$0 = \Pr[\emptyset] = \Pr[A \cap B] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] .$$

Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln (Forts.))

Zur Erinnerung:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Wir betrachten das Ereignis $A \cap B \cap C$. Wenn $A \cap B$ eintritt, so sind beide gewürfelten Augenzahlen gerade und somit ergibt auch die Summe davon eine gerade Zahl. Daraus folgt $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$ bzw. $\Pr[C|A \cap B] = 0 \neq \Pr[C]$. Das Ereignis $A \cap B$ liefert uns also Information über das Ereignis C .

Definition 22

Die paarweise verschiedenen Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen **unabhängig**, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (2)$$

Eine unendliche Familie von paarweise verschiedenen Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn (2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Lemma 23

Die (paarweise verschiedenen) Ereignisse A_1, \dots, A_n sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}], \quad (3)$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Beweis:

Zunächst zeigen wir, dass aus (2) die Bedingung (3) folgt. Wir beweisen dies durch Induktion über die Anzahl der Nullen in s_1, \dots, s_n . Wenn $s_1 = \dots = s_n = 1$ gilt, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gelte ohne Einschränkung $s_1 = 0$. Aus dem Additionssatz folgt dann

$$\begin{aligned} \Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &\quad - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}]. \end{aligned}$$

Darauf können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} &\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] - \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= (1 - \Pr[A_1]) \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}], \end{aligned}$$

woraus die Behauptung wegen $1 - \Pr[A_1] = \Pr[\bar{A}_1]$ folgt.

Beweis (Forts.):

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (3) $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$ folgt. Es gilt wegen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$\begin{aligned}\Pr[A_1 \cap A_2] &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \sum_{s_3=0,1} \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \sum_{s_n=0,1} \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2],\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □

Aus der Darstellung in Lemma 23 folgt die wichtige Beobachtung, dass für zwei unabhängige Ereignisse A und B auch die Ereignisse \bar{A} und B (und analog auch A und \bar{B} bzw. \bar{A} und \bar{B}) unabhängig sind!

Ebenso folgt:

Lemma 24

Seien A , B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis:

Die Unabhängigkeit von $A \cap B$ und C folgt unmittelbar aus Definition 22.

Aus

$$\begin{aligned}\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C] \\ &= \Pr[C] \cdot (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]) \\ &= \Pr[A \cup B] \cdot \Pr[C]\end{aligned}$$

folgt die Unabhängigkeit von $A \cup B$ und C . □

4. Zufallsvariablen

4.1 Grundlagen

Anstatt der Ereignisse selbst sind wir oft an „Auswirkungen“ oder „Merkmale“ der (Elementar)Ereignisse interessiert.

Definition 25

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge Ω gegeben. Eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable X über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge Ω heißt **diskret**.

Bei diskreten Zufallsvariablen ist der **Wertebereich**

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}; \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ebenfalls wieder endlich (bzw. abzählbar unendlich).

Beispiel 26

Wir werfen eine ideale Münze drei Mal. Als Ergebnismenge erhalten wir $\Omega := \{H, T\}^3$. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis „Head“.

Beispielsweise gilt also $Y(HTH) = 2$ und $Y(HHH) = 3$. Y hat den Wertebereich $W_Y = \{0, 1, 2, 3\}$.

Für $W_X = \{x_1, \dots, x_n\}$ bzw. $W_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ betrachten wir (für ein beliebiges $1 \leq i \leq n$ bzw. $x_i \in \mathbb{N}$) das Ereignis

$$A_i := \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\} = X^{-1}(x_i).$$

Bemerkung: Anstelle von $\Pr[X^{-1}(x_i)]$ verwendet man häufig auch die Schreibweise $\Pr[„X = x_i“]$. Analog setzt man

$$\begin{aligned} \Pr[„X \leq x_i“] &= \sum_{x \in W_X : x \leq x_i} \Pr[„X = x“] \\ &= \Pr[\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x_i\}]. \end{aligned}$$

Oft lässt man auch die Anführungszeichen weg.

Definition 27

- Die Funktion

$$f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X = x] \in [0, 1] \quad (4)$$

nennt man **(diskrete) Dichte(funktion)** der Zufallsvariablen X .

- Die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X \leq x] = \sum_{x' \in W_X : x' \leq x} \Pr[X = x'] \in [0, 1] \quad (5)$$

heißt **Verteilung(sfunktion)** der Zufallsvariablen X .

Beispiel 28

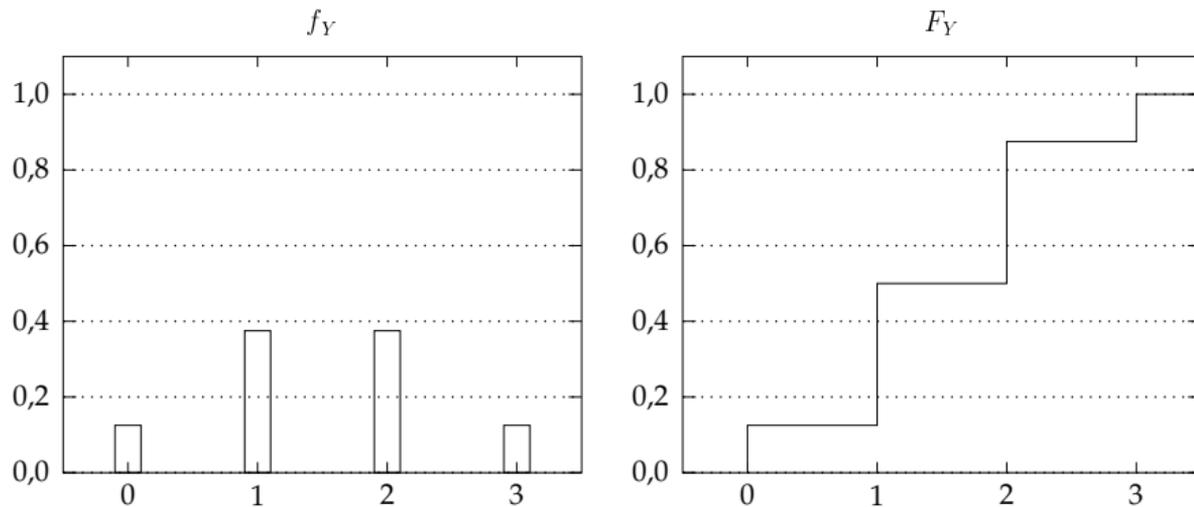
Für die Zufallsvariable Y erhalten wir

$$\Pr[Y = 0] = \Pr[TTT] = \frac{1}{8},$$

$$\Pr[Y = 1] = \Pr[HTT] + \Pr[THT] + \Pr[TTH] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 2] = \Pr[HHT] + \Pr[HTH] + \Pr[THH] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 3] = \Pr[HHH] = \frac{1}{8}.$$



Dichte und Verteilung von Y

Bemerkung: Man kann statt Ω auch den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum über W_X betrachten.

4.2 Erwartungswert und Varianz

Definition 29

Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den **Erwartungswert** $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x),$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

Beispiel 30

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^3 i \cdot \Pr[Y = i] \\ &= 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \\ &= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$